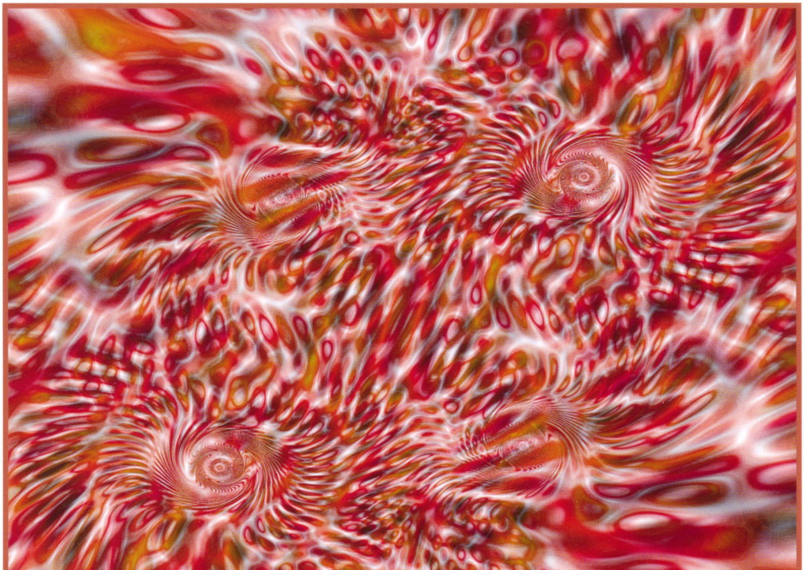
昭和38年７月２日第３種郵便物認可
2006年１月１日発行　第44巻１号　毎月１回１日発行
ISSN 0386—2240

数理科学

1
2006

特集 偶然から必然へ
小さな原因と大きな結果



No.511

サイエンス社

H.W.クーン／S.ナサー 編 落合卓四郎◆松島 斉 訳



JOHN NASH

ナッシュは何を見たか

純粋数学とゲーム理論

●A5上製 本体3,500円 ISBN4-431-71038-8

ノーベル経済学賞を受賞した数学者ナッシュ

アカデミー賞受賞映画 ビューティフル・マインド の主人公ナッシュの天才が燦然と輝いている歴史的大論文8本の全訳

解説,自伝,プリンストン時代の写真史などを収録

まえがき・・・ハロルド・W・クーン／Introduction:ナッシュその人について・・・シルヴィア・ナサー／Chapter 1:ノーベル経済学賞記者発表・・・スウェーデン王立科学アカデミー
Chapter 2:自 伝・・・ジョン・F・ナッシュ・ジュニア／Photo Essay:プリンストンに来てからのナッシュ写真史／Chapter 3:ゲーム「Hex」・・・ジョン・ミルナー
Chapter 4~12:交渉問題／n人ゲームにおける均衡点／ナッシュの博士論文「非協力ゲーム」英文原版／非協力ゲーム／2人協力ゲーム／並列制御
実代数的多様体／リーマン多様体の埋め込み問題／放物型方程式と楕円型方程式の解の連続性・・・ジョン・F・ナッシュ・ジュニア
あとがき・・・ジョン・F・ナッシュ・ジュニア／ゲーム理論,数学,そして経済学・・・松島 斉／数学におけるナッシュの貢献について・・・落合卓四郎ほか

新刊

コンサートホールとオペラハウス

新刊

音楽と空間の響きと建築



レオ・L・ベラネク／日高孝之／永田 穂 著
●B5変 本体9,500円 ISBN4-431-71177-5

建築音響設計のバイブル

世界31の国と地域の100の音楽ホールの詳細データを一挙に解説

金属における拡散

純金属および合金における拡散の基礎,理論,現象



Th.ホイマン 著 H.メーラー 協力
藤川辰一郎 訳
●A5 本体6,300円 ISBN4-431-71176-7

拡散現象の研究の集大成

最新の研究成果を取り入れた待望の一冊

拡散に関連する材料の研究に携わる研究者・技術者のための最適の書

素粒子標準模型入門

新刊

W.N.コッティンガム／D.A.グリーンウッド 著 樺沢宇紀 訳
●A5 本体4,000円 ISBN4-431-71175-9

フーリエ音響学

音の放射と近距離場音響ホログラフィの基礎

新刊

E.G.ウィリアムズ 著 吉川 茂／西條献児 訳
●A5 本体5,500円 ISBN4-431-71174-0

格子上の場の理論

新刊

青木慎也 著 シュプリンガー現代理論物理学シリーズ
●A5上製 本体4,800円 ISBN4-431-71172-4

幾何学的量子力学

新刊

倉辻比呂志 著 シュプリンガー現代理論物理学シリーズ
●A5上製 本体5,200円 ISBN4-431-71171-6

フュージョン 宇宙のエネルギー

G.マクラッケン／P.ストット 著 村岡克紀／飯吉厚夫
●A5 約256頁 本体予価3,000円 ISBN4-431-71180-5 近刊

クォークの不思議 素粒子物理学の神秘と革命

R.M.バーネット／H.ミューリー／H.R.クイン 著 守谷昌代 訳
●A5 約336頁 本体3,500円 ISBN4-431-71076-0 近刊

アインシュタイン 奇跡の年1905

J.S.リグデン 著 並木雅俊 訳
●A5 本体価格未定 ISBN4-431-71144-9 近刊

※価格は全て税別

MATHEMATICAL SCIENCES
Number 511 January 2006

偶然から必然へ

小さな原因と大きな結果

表紙：戸川　隼人

January 2006 MATHEMATICAL SCIENCES Number 511

特集／偶然から必然へ

偶然と必然

ミクロとマクロ，量子ゆらぎと非可換性，およびゆらぎと秩序生成

鈴木 増雄

1. はじめに

今回の特集の「偶然から必然へ——小さな原因と大きな結果」というテーマは，数学，物理，生物物理などの自然科学は言うに及ばず，経済，政治などの社会科学や哲学，心理学などの人文科学の広い分野にわたり普遍的かつ基本的課題である．ここでは，主として数理科学の分野に限定して議論したい．19 世紀までの「偶然性」は，制御できないほど複雑な条件で生起する現象の特徴として捉えられていた．社会科学や人文科学の分野では今でもこの側面が主であるが，物理学では，量子力学の誕生以降，物質の運動法則そのものが本質的に確率的であるという状況になってきた．また，たとえ古典力学の方程式系でもカオスの現れるような状況では，初期値のわずかな違いが時間と共に極めて大きく（指数関数的に）異なる結果を与えるという意味で，これも本質的な偶然性のカテゴリーに入れることができるであろう．前者に分類される古典的な偶然性は，数学的には確率論（確率過程と確率微分方程式）によって扱われる．詳しくは，飛田氏や香取氏の解説を参照して頂きたい．

2. 目に見える現象から目に見えないものを知る ——アインシュタインのブラウン運動の理論

ミクロな量からマクロな性質を導く一般的な法則を最初に発見したのはボルツマンである．彼は，マクロなエントロピー S がミクロな状態の数 W を用いて $S = k\log W$ と表されること（ボルツマンの原理）を見つけた．これは統計力学の基本原理となっている．一方，アインシュタインは，これを W について解いた式 $W = \exp(S/k)$ を物理的に見直し，マクロなエントロピー S を観測することによりミクロな W がわかると考えた．同様に，系の比熱 C からエネルギーのゆらぎ $\langle(\Delta E)^2\rangle$ が $\langle(\Delta E)^2\rangle = kT^2C$ によって与えられることを早い時期に気づいていた．さらに，歴史上もっとも重要なアインシュタインの発見の一つはブラウン運動の理論である（同じ 1905 年には，光電効果の理論および特殊相対性理論が発表されていることはあまりにも有名である）．アインシュタインは，ブラウン粒子の速度 v の運動を線形の範囲で

$$m\frac{dv}{dt} = -\zeta v + \eta(t) \tag{2.1}$$

の形に表した．ただし，m はブラウン粒子の質量を表し，ζ は摩擦係数である．(2.1) の右辺の $\eta(t)$ はブラウン粒子にランダムに衝突する分子から受ける

力である．これはランジュバン方程式と呼ばれる．ここで，扱いを単純化するため，$\eta(t)$ は δ 関数（超関数）的な性格を持ち，至るところ微分不可能な変数であり，ランダム平均が $\langle\eta(t)\eta(t')\rangle = 2\varepsilon\delta(t-t')$ を充たすものと考える．すなわち，ε はランダムな力の強さを表す．ランジュバンは (2.1) のような確率微分方程式を初めて導入し，その数学的な取扱い方を議論した．アインシュタインは，式 (2.1) を物理現象を記述するモデルとして捉え，ζ と $\eta(t)$ が他から独立に与えられる量ではなく，互いに関係していることを見抜いた．実際，(2.1) 式の定常解をランダムな力の分布に関して平均をとり，ブラウン粒子の 1 次元方向の運動エネルギーの平均を求めると[1)]，$\frac{1}{2}m\langle v^2\rangle = \varepsilon/(2\zeta)$ と与えられる．古典的な系が熱平衡状態にあれば，等分配則が成り立ち，1 自由度当りの平均エネルギーは $\frac{1}{2}kT$ であるから，

$$\varepsilon = kT\zeta \tag{2.2}$$

の関係式が導かれる．これが有名なアインシュタインの関係式である．よく知られたこの関係式の導出にまでここでふれたのは，この式をどう解釈するかが，我々のテーマにとって基本的に重要であるからである．(2.2) 式の左辺はミクロなゆらぎの強さを表し，右辺の ζ はマクロな摩擦抵抗の大きさを表している．したがって，目に見える現象を観測して ζ を測れば，ミクロなゆらぎがわかることになる．これがアインシュタインの自然な物の見方である．J.B. ペランは，これに基づいて実験を行い，アボガドロ定数を求め，分子の存在を科学的に実証した．

そもそも，統計力学の役割は，ミクロな法則（古典力学，量子力学，電磁気学など）から，マクロな現象を説明することにある．この立場を非平衡系にまで拡張すると，(2.2) 式を ζ について解いた関係式

$$\zeta = \frac{1}{kT}\varepsilon = \frac{1}{kT}\int_0^\infty \langle\eta(0)\eta(t)\rangle dt \tag{2.3}$$

は，まさに非平衡統計力学の出発点になっている．上の式 (2.3) では，抵抗係数がランダムな力のゆらぎ（時間相関関数）で表されている．一般には，このランダムな力を抽出することは容易ではない．そこで，むしろ速度 v のゆらぎから，不可逆過程の（必要な）物理量を求めるほうが自然である．実際，アインシュタインのモデル (2.1) では，その解 $v = v(t)$ が顕わに求まり，

$$\langle v(0)v(t)\rangle = \langle v^2(0)\rangle \exp\left(-\frac{\zeta}{m}t\right) \tag{2.4}$$

が容易に導かれる[1)]．したがって，これを時間 t で積分し，再び等分配則 $\frac{1}{2}m\langle v^2(0)\rangle = \frac{1}{2}kT$ を用いると

$$\frac{1}{\zeta} = \frac{1}{kT}\int_0^\infty \langle v(0)v(t)\rangle dt \tag{2.5}$$

が得られる[1)]．速度 v は流れ j に比例し，$1/\zeta$ は伝導度 σ に比例するから，それぞれの単位（次元）を適当にとれば，(2.5) は

$$\sigma = \frac{1}{kT}\int_0^\infty \langle j(0)j(t)\rangle dt \tag{2.6}$$

と書ける[1)]．これを量子系に拡張した一般公式は久保公式と呼ばれている．それは，外力の方向の流れの演算子 J のカノニカルな時間相関関数で表される：外力 $F(t) = Fe^{i\omega t}$ に対する応答 $\langle J\rangle_t$ を $\langle J\rangle_t = \sigma(\omega)Fe^{i\omega t}$ と表すとき，その応答係数が

$$\sigma(\omega) = \int_0^\infty dt\, e^{-i\omega t}\int_0^\beta d\lambda\langle J(-i\hbar\lambda)J(t)\rangle_{\rm eq} \tag{2.7}$$

で与えられる．ただし，$\beta = 1/kT$ および $J(z)$ は系のハミルトニアン $\mathcal{H}$ を用いて $J(z) = \exp(iz\mathcal{H}/\hbar)J\exp(-iz\mathcal{H}/\hbar)$ と表される．また，$\langle\cdots\rangle_{\rm eq}$ は，外力 $F(t)$ の無いときの熱平衡状態における平均である．すなわち，$\langle Q\rangle_{\rm eq} = {\rm Tr}\,Q\exp(-\beta\mathcal{H})/{\rm Tr}\exp(-\beta\mathcal{H})$ である．流れの演算子が運動の定数を含む場合には特別な注意が必要になる[2~4)]．この問題は，1 次元量子スピン系の可解模型で最近再び話題になっている．(2.3) 式は揺動散逸定理とも呼ばれている．このように，古典系では，揺動と散逸の比例定数は温度 T（またはその逆数）で表されるが，量子系では，流れの演算子とハミルトニアンの非可換性のため，この量

子ゆらぎと熱ゆらぎが絡み合って複雑な関係になる．これら非可換な効果を統一的に扱うには，筆者によって開発された「量子解析」の方法を用いると便利である[1)]．

以上は線形の範囲でゆらぎ（偶然）と散逸（不可逆性，必然）との関係を論じたものであるが，非線形への拡張も最近いろいろ試みられている．その中でも，ズバーレフの理論は広範囲の分野で最近利用されている[1,5)]．また，揺動散逸定理に関する一般的な考察も最近再び盛んになってきている[6)]．

3. 量子ゆらぎ，非可換性，不確定性原理および量子の同一性（識別不可能性）

量子系は，ハイゼンベルグの不確定性原理[7)]によって本質的に確率的な性格を持っている．しかし，その確率的振舞いを記述する波動関数はシュレーディンガー方程式に従って“必然的に”変化する．この意味で，量子現象は偶然と必然の極めて高度な絡み合いによって起こる．このように，量子力学の本質的な特徴は，数学的には演算子の非可換性にあり，物理的にはその非可換性に由来する不確定性原理にある．さらには，同種粒子の同一性すなわち識別不可能性という量子系の統計力学にとって基本的な性質は，この不確定性原理に基づく．同種の粒子が同じ運動量を持つとすると位置を確定することができないので２つの粒子が近づいたとき両者を識別することは原理的にできなくなる．こうして，粒子の同一性という定性的な量子効果（一見プランク定数 $\hbar$ が直接入って来ないように見える効果）も運動量演算子と空間座標の演算子との非可換性（$\hbar$ が顕わに入った関係式）から導かれる．また，量子状態が複素数の波動関数によって表されるために，その位相とそれに由来する量子干渉効果がいろいろな現象で重要な働きをする．AB 効果やジョセフソン効果（これは超伝導状態を表すマクロな波動関数の位相の効果）などが良い例である．詳しくは，文献 7) を参照して頂きたい．

さらにこれらの量子効果は，通信分野にもその応用の期待が持たれている．量子観測の問題と関連して，盗聴困難な通信の候補としての量子通信は最近大きな話題となっている．詳しくは，大矢氏の解説を参照願いたい．

4. ゆらぎから秩序生成へ――線形から非線形へ

第２節で説明したアインシュタインのブラウン運動の理論は線形理論である．秩序が形成される問題を扱うには，非線形の効果を取り込まなければならない．それを扱うためのもっとも簡単な意味のあるモデルは次の非線形ランジュバン方程式で記述される：

$$\frac{dx}{dt} = \gamma x - gx^3 + \eta(t). \tag{4.1}$$

第２節の (2.1) 式と比較すると，線形項の符号が逆になっており（$\gamma > 0$），さらに非線形項（$-gx^3$）が加わっている．秩序が安定解として生成されるためには，この非線形項の存在が本質的に重要である．この方程式の厳密解は今に至るまで求まっていないが，筆者の提唱した時間に関する非線形スケール理論（すなわち，$\tau = (g\varepsilon/\gamma^2)\exp(2\gamma t)$ というスケール変数を導入して，これを一定にしたまま $g\varepsilon \to 0$，$t \to \infty$ のスケーリング極限でゆらぎ $\langle x^2(t)\rangle$ を τ の関数として求め，$\langle x^2(0)\rangle \sim 0$（無秩序状態）から $\langle x^2(t)\rangle \sim 1$（秩序状態）に移る過程を解析的に導出する理論）によると，

$$\frac{\langle x^2(t)\rangle}{\langle x^2\rangle_{\rm st}} \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2/2}\frac{\xi^2\tau}{1+\xi^2\tau}d\xi \tag{4.2}$$

と与えられる[1)]．ただし，$\langle x^2\rangle_{\rm st} = \gamma/g$ である．この理論（具体的には τ の表式）によると，ランダムな力 $\eta(t)$ で表されるゆらぎ（偶然性）と非線形性（必然性）との絡み合い（相乗効果）が重要であることがわかる．初期にちょうど不安定平衡点にある場合には，ランダムな力（ゆらぎ）がないと系はそのままで変化しないが，ゆらぎの効果

が働くとやがて秩序が生成されるようになる．こうして，非線形効果により安定な秩序状態が形成される．このようなメカニズムは極めて普遍的であり，パターン形成などの物理現象に限らず，ザボチンスキー反応などの化学現象，その他エコロジー，社会現象，さらには創造活動など，あらゆるところに見られる．要は，それぞれの現象で，非線形性を持った環境を準備し設定しておき，ゆらぎ（偶然性）をいかにうまく捉えるかにある．地球規模のゆらぎと非線形性については，木村氏の解説を参照して欲しい．

5. 生物集団における生存のための戦略とゆらぎ

短い時間スケール（世代交代に比べて短い時間スケール）では，生物集団の構成員である個々の振舞いに，ある種のゆらぎというか遊びの存在することが重要であることが知られている．例えば，蟻の社会では，ほとんどの働き蟻は，食べもののありかと蟻の巣の間を行列を作って食べものを運ぶためせっせと往復している．しかし，少数の蟻は，その行列を離れて当てもなくふらふらと歩き回っている．一見遊んでいるかのように見える．しかし，これは次の新しい食べもののありかを探している行動であり重要な役割を果している．人間の社会では，芸術活動，文学活動，基礎科学の研究などの文化活動がすべて人類のこれからのより良き生存のために重要な役割を果しているものと考えられる．科学の研究などでは，蓋然性の小さい現象を発見するほどインパクトが大きい．ノーベル物理学賞を受賞した小柴昌俊博士は，500年に1回という程度に稀な超新星爆発でできたニュートリノの観測に成功した．これは宇宙物理学にとって極めてインパクトの大きい観測であった．これもひとえにそれを捉える装置（カミオカンデ）を作って備えていたからである．

長い時間のスケールでは，生命の生存戦略は進化によって遂行されている．この生物進化はDNAの突然変異という偶然性を有効に利用し，環境に適応するのに都合の良いものがより多く生き延びられるような選択則が働き，生存に望ましい進化が起こる．ホモキラリティや生命存続に有利な遺伝子情報をもたらす分子進化に関しては，伏見氏の解説を参照して欲しい．また，生態系の餌と捕食者との関係におけるゆらぎの役割などに関しては，厳佐氏の解説を参照されたい．

6. 思考とゆらぎ

この特集では，我々の思考そのものの本体である脳の情報処理の数理，特に甘利の情報幾何について，その提唱者自身に解説をお願いした．日常生活においても，この原理を活用すると，より良い情報等の処理ができると期待される．さらに，偶然と必然，真理とは何か等の哲学的考察に関しては，柳瀬氏の解説が参考になるであろう．

7. 結び

人間とは弱いものである．人生においても，小さな原因（偶然）が大きな結果をもたらす．望むらくは，その偶然をより良き大きな結果にしたいものである．そのような良い結果を生む偶然を選択し大切に育てていくことが人生の努力の過程として肝要であると思う．この特集がそういうことに少しでも役に立てば幸いである．

参考文献

1) 鈴木増雄，現代物理学叢書『統計力学』（岩波書店，2000）．
2) P. Mazur, *Physica* **43**, 533 (1969).
3) M. Suzuki, *Physica* **51**, 277 (1971).
4) 鈴木増雄，月刊フィジクス/vol.**3**, No.1, 26 (1982).
5) A.L. Kuzemsky, *Int. J. Mod. Phys.* **B19** (No.6), 1029 (2005).
6) D.J. Evans and D.J. Searles, *Adv. in Phys.* **51** (No.7) 1529 (2002).
7) 数理科学「不確定性原理の新展開」，**43** 巻 10 号（サイエンス社，2005）．

（すずき・ますお，東京理科大学理学部，東京大学名誉教授）

偶然と必然の確率論

その技法とは

飛田　武幸

1. はじめに

数理的に扱える「偶然」とは一体どんなものであろうか？ これに反して「必然」というのは考え易い．すなわち，何の疑いもなく唯一通りの確定した結果が導かれること，原因について一通りに決まるもの，などと常識的な解釈ができる．では，偶然のほうはと言われると，必然と対照的なものであるということにはならない．偶然現象ということで期待されるものは，でたらめな現象，予測できない事柄，揺らぐもの，あるいは人為的に規則性のないものと見なされる現象など多々あるが，ここでは，考えている対象について，結果にはいろいろな可能性があり，それらに確率が与えられるものと理解しよう．

では，それら偶然現象にはどんな場合があるかいくつかの典型を取り上げ，確率論によるそれらの取扱いにどんな手法があるかをも併せて考えていくことにする．

2. 確率論

偶然の数理を扱う確率論の舞台は確率空間 $(\Omega, \boldsymbol{B}, P)$ である．ここで Ω は偶然を支配するパラメータ ω の集合で，$\boldsymbol{B}$ は Ω の部分集合からなる完全加法族で，その要素を事象と呼ぶ．P は事象の確率を定める．そのように設定できるものを，偶然現象と言う（自明な場合を除く，自明な場合は必然が対応する）．Ω を具体的に決め，確率 P を与えることが，その偶然現象の内容を数学の対象にすることである．

例 1. ブラウン運動

水中の浮遊する微粒子の運動はブラウン運動としてよく知られている．これは 1827 年にイギリスの生物学者 R. ブラウンによって発見されたとされる．発見の歴史はいろいろあろうが，現在につながる科学の話題となったものの始めと見てよかろう．また，それが数学の話題，しかも極めて重要なものと認識されたのは 1905 年の A. Einstein の論文からである（1905 年の有名な 3 論文の一つ）．もしブラウン運動は，多数の水の分子が，それらと比べれば大きいが，やはり微細な粒子（花粉に含まれる微粒子）に無数に近い回数で衝突したときの結果による運動であると理解したならば，この運動は個々の粒子についての運動を決める微分方程式を書いて，その解の決める決定論的な運動と言えるのではないか．こんな疑問を聞いたことがある．方程式の個数を考えただけでもそれが不可能なことは，言い出した人もよくわかっているのだが…．それでは，決まった条件を満たす粒子の密度，全体の中で占める割合を考えて，確率の言葉で表現したらよかろうということになる．時間的な動きも確率的に記述されよう．次のような数値をあげると，この考えが受け入れられよう．常温で水中に微細な粒子が沢山とけ込んでいると

する．

水の分子の大きさ	10^{-5} – 10^{-7} cm
花粉の微粒子の大きさ	10^{-4} cm 程度
衝突回数	毎秒約 10^{20} 回
平均移動距離	毎秒約 0.00015 cm

この事情がわかったとき，次の Einstein による数学的（確率的）記述は簡にして要を得ていることがわかる．3 次元の運動であるが，簡単のために 1 次元の成分を取り上げる（実際，x, y, z 方向に独立に行動し，同じ確率法則に従うので，1 次元の動きに着目すれば十分である）．時刻 t における単位体積あたりの微粒子の密度を $u(x,t), x \in R$，とおく．微粒子の推移の時間的・空間的一様性を仮定して，τ 時間のうちに x から $x+y$ まで変異する確率を $p(\tau, y)$ とおく．時刻 t から $t+\tau$ まで経過したとき

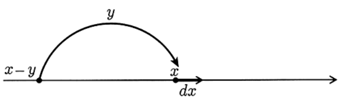


図 1　粒子の動き．

$$u(x, t+\tau)dx = \int_R u(x-y, t)p(\tau, y)dy$$

が得られる．p について

$$p(t, -y) = p(t, y), \qquad \int_R y^2 p(t, y)dy = D \cdot t$$

を仮定する．Taylor 展開により

$$\begin{aligned} &u(x,t) + \tau u_t(x,t) + o(\tau) \\ &= \int_R \Big(u(x,t) - y u_x(x,t) \\ &\qquad + \frac{y^2}{2} u_{xx}(x,t) + \cdots \Big) p(\tau, y)dy. \end{aligned}$$

これから熱方程式 $u_t = \frac{1}{2} D u_{xx}$ が導かれ，ガウス核 $u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi Dt}} \exp[-\frac{x^2}{2Dt}]$ がその解となっている．こうして確率論への一歩が踏み出された．続いて P. Lévy[8] によって，この理論は大きく発展することになった（例えば文献 7)）．また確率解析の主要な内容をも提供している．さらに，このブラウン運動が持っている最適性とか内在する対称性の研究など，未開発な研究材料も提供していて，いずれの段階でも偶然と必然が共存し，双方のアイディアが活かされる最適の話題になっている．

例 2. 測定から誤差論へ

ガウスは土地の測量や天体の観測などで，いろいろな測定値を扱ううちに，誤差の数理的な処理を考えた．そこでは当然ガウス分布（正規分布とも呼ぶが，ガウスの名を冠するのがよいだろう）が現れる．しかしガウスの卓見はこれを理論的にも明らかにしたことである．いわばガウス分布の特徴づけである．これはガウスの功績であろう．以下，大まかにその方法を説明する．

ある確率分布の平均値をいくつかのサンプルをとって，それらの値から推定しようとする場合を考える．サンプルは偶然量であるが，その散らばりには自ずからある程度の制限が伴う．常識的に考えれば，「例えば n 個のサンプル $x_1, x_2, \cdots, x_n$ が得られたとしよう．n がいくつのときでも，それらの算術平均が分布の平均値の最適な推定値になる」というのを原理と思うのが普通であろう．しかし，このことはガウス分布のときのみ正しい．

ここで，分布の平均値をどのように理解するかが問題となる．当然平均値より大きいサンプルと小さいものとはほぼ同じ個数であろうと考える．簡単な例でこのことは否定される．

例えば，$\frac{1}{10}$ の確率で当たる“くじ”を引くとする．復元抽出，すなわち引いたくじは元に戻して，いつでも同じ状態で引くことにして，当たるまで引き続けるとしたら引く回数の平均はどうなるであろうか？

簡単な確率の計算で，このくじを当たるまでに引く回数の理論的（数学的）平均は 10 回である．一方，回数で分けて，大勢の人がこのくじを当たるまで引くとしたとき，引いた回数が 7 回までに当たった人の数は全体の半数以上となる．当然平均値である 10 回までで当たる人々が半数と思う

常識（必然性か？）はあてはまらない．

さて，ガウス分布の特徴づけに戻ろう．誤差の確率分布の密度関数を $p(x)$ とおく．一応それを未知関数として出発し，上記の「　」内の原理が成り立つとしたときに $p(x)$ を決定しよう．ここで，いくらかの仮定をおく．$p(x)$ は x の滑らかな関数で，0 にならない，また $x=0$ の周りで対称であること等である．真の平均値を m とおき，得られたサンプルが $x_1, x_2, \cdots, x_n$ であったとすれば，誤差は $x_i - m, i = 1, 2, \cdots, n,$ となる．このようなサンプルが得られる確率密度は $\Pi_{i=1}^n p(x_i - m)$ となる．$\log p(x) = \varphi(x)$ とおく．$p(x)$ についての仮定から，上の積を最大にする m がサンプルの算術平均 $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum x_i$ だということになり，$\sum_1^n \varphi'(x_i - \bar{x}) = 0$ でなければならない．

そこで，特に $x_2 = x_3 = \cdots = x_n = x_1 - na$ の場合を考えると，$\bar{x} = x_1 - (n-1)a$ となり，上の式は $\varphi'((n-1)a) = (n-1)\varphi'(a)$ となる．ここで，簡単な計算から，上の式で $(n-1)$ の代わりに，任意の実数 k に対して成り立つことがわかる．よって $\varphi'(x) = cx$, ただし c は定数，したがって $\varphi(x) = \frac{1}{2}cx^2 + d$ となる．これから元の $p(x)$ について $p(x) = d'e^{\frac{1}{2}cx^2}$ が出る．$p(x)$ は正の値をとり，全区間で積分して 1 になることから，定数をおき直して $p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{1}{2}\frac{x^2}{\sigma^2}}$ がわかる．すなわちガウス分布である．

こうして，観測結果としての実現値を偶然量とみて，その確率分布を考え，その偶然量の定性的な性質からガウス分布を導き出すことができた．これは，確定的（必然か）なものから偶然的なものへ，そして確率論につながる話として興味があるが，さらに，このガウス分布を総合するブラウン運動が現代数学の中で極めて重要な役割を果たしていることに注意したい．

例 3．情報通信：確率化の例として

信号伝達の場合，通信回路にノイズが入る場合は当然偶然の要素が関与することになり，不本意なノイズとして除去することになる．

そのようなノイズが無いときは，送信信号は間違いなく受信側に到達するわけで，必然的なものである．ところが，受信側からだけで見たときは偶然現象と見なす立場がある．すなわち，受信する前にはどんな信号が送られてくるのかわからない．その意味で受信はランダム（偶然）現象である．例えばメールで通信文が送られてくる場合，すべての文字について，それが送られてくる頻度とか，逐次受信のとき信号相互の従属度などがわかれば，受信信号は確率過程—時系列と言ってもよい—の一つの実現と見なされる．ここに一見確定的な現象と見られるものにも，ランダム現象と見なされる場合があることがわかる．

そこで，通信での入力を確率過程と考え，通信路はこの確率過程に作用する変換機構としたとき，受信信号は入力である確率過程の関数と考えられる．この偶然現象の特徴はランダム現象としての送信信号の構造を人工的に変えられるということである．そこで，どのような確率過程としたら有効な信号がより効率的に送ることができるかが問題となる．そのために，情報理論が準備される．

理論の第一に，情報伝達の有効さを測る尺度が必要である．偶然性が高いほど受信（実現）したときの価値は高いわけで，それを測るのが**エントロピー**である．偶然さが多いほどエントロピーは大きい．そのとき，同じ内容を送るにしても，適当に**符号化**して，時間あたりの情報量が多くなるようにすることは重要な手法と言える．

次に，送信信号が連続時間による確率過程であるときは，その重複度が考えられる．例えば重複度が 2 であれば，機構として 1 つの回路を用いながら，2 つの確率過程を同時に送信していることになる．この重複度の話は，ガウス過程の場合には，十分詳しい理論が準備されている．

さらに興味深いことは，送信信号が通信回路を通して受信されたとき，送受信信号間の情報のロスである．ホワイトノイズ入力に対して受信が多重マルコフ性のあるガウス過程になる場合では，このロスが具体的に計算される．

この方面の研究は広く，数学，情報理論などにわたって研究されているが，オリジナルなアイディ

アは文献 6) によるところが大きい．

この例のように，厄介な偶然も消去して実用に，逆に必然的なものを偶然に変えて数理を適用するのは極めて有意義なことである．

3. 量子力学

量子力学には，必然から偶然への自然な移行を説明する多くの例が見られる．典型的な 2 例をあげておきたい．ほかに，文献 1, 2) を参照．

3.1 不確定性関係

量子論では測定ということに大きな力点が置かれ，位置と運動量に関するハイゼンベルクの不確定性関係はその基本的なものとなっている．揺らぎに関する定式化などを見るとき，まさに偶然量の必然的な導入を見ることができる．本稿で述べなければならないところであるが，すでに本誌 2005 年 10 月号に特集されているので[8]，詳細はそちらに譲る．

3.2 経路積分

量子力学の設定の一つとして，P. Dirac の考えに始まり，R.P. Feynman によって提案された経路積分の方法がある．これについては多くの研究者によるそれぞれの貢献があるが，ここでは決定的なものにブラウン運動を用いた偶然の要素を借りた量子化の方法を述べたい．古典力学系の軌跡はラグランジアンによって一通りに決定される．量子力学では古典的な軌跡のほかにも揺らいだ軌跡を考えなければならない．状態の推移を与えるグリーン関数（プロパゲータ）は虚数単位 i をつけた作用積分の指数関数の平均で与えられるというのが Feynman の定式化である．それでは，古典力学的な軌跡を元にして量子力学的な（可能な）軌跡を与えるために揺らがせる量は何で決まるのか？ いろいろな揺らぎをもった軌跡を変数とする汎関数の平均のとり方はどうするか？ すなわち可能な揺らぎの集合に確率測度を入れなければならないが，その測度は？ こういった基本的な問題が提起される．こうして必然（ラグランジアンによって必然的に決まる）から偶然（揺らぐ軌跡，ランダムな関数）への移行が見られる．

我々は，1981 年にこの方向への一つの提案を行なった（論文は 1983 年）．それを説明しよう．

ラグランジアン $L(x(s),\dot{x}(s)) = \frac{m}{2}\dot{x}(s)^2 + V(x(s))$ で決まる古典力学系を考える．変分法によって一意的に決定される軌跡を $x(s), 0 \le s \le t$, と書く．量子力学ではこの古典的な軌跡が揺らぐと考えられ，揺らぐ軌跡を

$$y(s) = x(s) + \sqrt{\frac{\hbar}{m}}B(s),$$

としよう．ここに $B(s)$ はブラウン運動である．実際は下に見るように，揺らぎには固定端（pinned）ブラウン運動を用いるが，その効果はデルタ関数を使うことにより実現される．

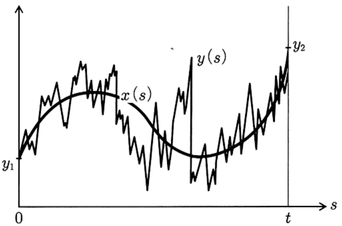


図 2　揺らぐ軌跡．

ラグランジアンを $L(y(s),\dot{y}(s))$ と書くとき，作用積分は

$$S = \int_0^t L(y(s),\dot{y}(s))ds.$$

となり，推移を示すグリーン関数 $G(0,t;y_1,y_2)$ は

$$G(0,t;y_1,y_2) = \left\langle N\exp\left[\frac{i}{\hbar}\int_0^t L(y,\dot{y})ds + \frac{1}{2}\int_0^t \dot{B}(s)^2 ds\right] \times \delta_o(y(t)-y_2)\right\rangle.$$

で表される．ここで $\langle\cdot,\cdot\rangle$ はホワイトノイズ測度による平均，すなわち積分である．

この積分では，被積分関数にホワイトノイズの超汎関数が現れるが，もちろん計算について厳密な証明を与えることができる（詳しい解説は文献 5)

の 8 章参照).

この方法で，ポテンシャル V がかなり一般の場合，例えばいくらか特異性をもつときでも，また時間に依存する場合でも，正確にプロパゲータを求めることができる．

Chern–Simons の汎関数積分にも，これを一般化した話が役立つようである[5,9]．

■ 4. おわりに ■

必然から偶然へといった話をさらに一歩進めて，より複雑な偶然へと指向したい．具体例を見ながら，最後に，そんな抱負を語ってみたい．

データが得られたとき，それを選ぶ方法に偶然が支配したと見る立場から統計的処理が行われる．結論は既存のものに対して下される．これに時間が介在して，データは確率過程（時系列）のサンプルと見なされるなら，未来の予測へとつながる．

ところが，もう一つの方向が重視されるようになった．インターネットのノードが持つリンク数の分布，地震についてマグニチュードに応じた発生頻度の分布，伝染病に関するある種の頻度グラフなどは，ガウス分布ではなくて，いわゆるベキ乗分布とか，ベキ法則と呼ばれるものが現れる．最近，そのような分布が出てくる要因を探求しようとする試みがなされるようになった．

測定値 $x(>0)$ が大きいとき，そのあたりの値をとる頻度はガウス分布のように急に小さくなるのではなくて，x のあるベキ (例えば $-\alpha$ 乗, $1<\alpha<3$) で近似されるものである．

さてこのデータに生命を授けよう；過去と未来に生きるように．ベキ乗分布に従うものは，時間的に変動する偶然現象のある時点での値の統計と見なされることが多い．その数学モデルは確率過程である．それは悠久の生命をもつ．いくつかの時点でデータをとって，この確率過程が（ガウス型でない）安定過程であることがわかれば幸いである．それは素なもの達，すなわち，種々のジャンプのポアソン過程の和である．ポアソン過程については，隠れた最適性や対称性などの特性が知られている．それらの特性に対応するものを現実の現象の中に見出すことは夢である．超えるべきハードルはいくつもあるが，課題として受けとめたい．

参考文献

1) 鈴木増雄，『統計力学』現代の物理学 4，岩波書店，1994.
2) 大貫義郎・鈴木増雄・柏太郎，『経路積分の方法』，現代の物理学 12, 岩波書店，1992.
3) J. モノー，『偶然と必然』渡辺格・村上光彦訳，みすず書房，1972.
4) R.P. Feynman and A.R. Hibbs, *Quantum mechanics and path integrals.* McGraw-Hill Book Co. 1965.
5) T. Hida and Si Si, *Lectures on white noise functionals.* World Scientific Pub. Co. 2005.
6) C.E. Shannon and W. Weaver, *The mathematical theory of communications.* Univ. of Illinois, 1949.
7) P. Lévy, *Processus stochastiques et mouvement brownien.* Gauthier-Villars. 1948, 2ème ed. 1965.
8) 数理科学 **43** 巻 10 号，2005, Oct. 特集「不確定性原理の新展開—量子測定・量子情報をめぐって」.
9) S. Albeverio, A. Hahn and A. Sengupta, Chern–Simons theory, Hida distribution, and state models. *IDAQP* **6**, 2003 supplement, 65–81.

（ひだ・たけゆき，名城大学理工学部）

経済物理の偶然と必然

香取 眞理

1. はじめに

経済物理（econophysics）は，経済学（economics）と物理学（physics）という2つの言葉をつなげて作られた造語である．この2つの橋渡しをすることを目的として1990年代後半に生まれた新しい研究分野を表す．経済現象を科学的・数理的に分析するという意味では，計量経済学や金融工学と共通するものであるが，特に「物理学」の視点に立って経済現象を理解しようとする点にそのユニークさがある．すなわち経済物理は，相転移・臨界現象，カオスとフラクタル，スピングラスやニューラル・ネットワークといった，主に統計物理学の分野での研究に携わってきた人々，あるいはその研究成果に深い関心のある人々によって提唱された新しい研究ターゲットを意味する．「複雑系科学」の最新の応用分野の一つと言ってもよいかもしれない．

もっとも今日，経済物理の研究集会には経済学者やディーラーと呼ばれる金融の現場で仕事をしている人も多く参加するようになり，上述の経緯を超えて，学際的な研究分野の様相を呈してきている．そしてそれに伴うニーズに応えるために，経済物理の研究結果に基づいて，経済活動に対して提言を与える試みも始まっているようである[1]．経済物理の生まれた背景とこれまでの研究についてすでに国内外でいくつかの教科書が出版されており[2~5]，また最新の研究成果を報告した特集号も出されている[6]．これらについては，参考文献を参照していただきたい．

私の研究室にいた大学院生の2人が経済物理に興味を持ち，この分野の創始者である高安秀樹氏（ソニー・コンピュータサイエンス研究所）と高安美佐子氏（東京工業大学大学院知能システム科学）に研究指導を受けていたことがある．私もそのときセミナーに参加したり，研究集会に出かけて行ったりして，新しい研究分野が創生される現場で，大学院生たちが嬉々として研究に励む姿を見ることができた．今後ますます研究が進展することを願うとともに，少し違った視点から見ても，経済物理という研究は大変魅力的なものであると思っている．と言うのは，経済現象を科学的・数理的に分析するという試みが，今回は複雑系科学という従来の還元論的な分析手法を超えようとする新しい潮流の中で生まれたため，その試みを通じて「現代物理学とは何であるか」という問題と対峙することができるように思うからである．そしてまた経済物理には，現代物理学を経済現象に応用するという物理から経済に向かう作用だけでなく，経済現象という複雑系を取り扱うことによって現代物理学自身の幅を広げ，その内容をさらに豊富なものにするという，経済から物理へ向いた作用も期待できると思うのである．

現代物理学と経済物理に共通するキーワードは「揺らぎ」である．揺らぎこそが，古典的な決定論的自然観を打破し，単純な還元論的理解の無効性を証明する．他方，経済現象に対する人々の最大の関心事は価格の揺らぎであると言ってもよいだろう．株価や為替レートの揺らぎをうまく予測できれば金儲けができるだろうし，深刻な金融破綻を回避できるかもしれない．揺らぎの法則性を解明することによって初めて，必然と偶然とが共存して見える複雑なこの世の中を理解することができるのであろう．

2. 現代物理は揺らぎの精密科学

現代物理学とは通常，量子力学と統計力学を指す．ニュートン力学，熱力学，電磁気学や流体力学など19世紀末までに完成した分野に対して，主に20世紀に入っ

てから創生し発展した分野であるからである．もっとも，もう21世紀であり，アインシュタインの奇跡の年から100年を経た今日から見れば，20世紀初頭は過去であり，現代と冠することにためらいも生じてくる．そこでここでは，「現代物理学とは，揺らぎの法則を明らかにして，そこから自然を理解しようとする点において，古典物理学とは一線を画するものである」という見方を提案することにする．ただし「揺らぎ」とは，一般に不確定性を意味するものとしておく．こうしておけば，古典力学系を記述する非線形方程式に対するカオス理論も，相転移・臨界現象に関係するフラクタル幾何学も，繰り込み群理論と同様に現代物理学に含まれることになり，「20世紀以降の…」とする“歴史に基づく定義”と矛盾しない．

量子力学で扱う揺らぎは，物質の位置と運動量とを同時に決定することはできないというハイゼンベルクの不確定性原理から生じるものである．例えば，糸の一端に錘をぶら下げた単振り子を考えてみよう．最もエネルギーの低い安定した状態は，古典力学的に考えれば当然，振り子が静止した状態である．このとき錘は最も低い位置にあり，この位置での重力ポテンシャルを零と定めれば（静止しているので運動エネルギーも零なので），全エネルギーは零である．ところがこの状態は，錘の位置を確定してしまっていることになっているので，ハイゼンベルクの不確定性原理に反し量子力学的には許されないのである．振り子は必ず振動していなければならない．振動していれば位置と運動量はともに不確定である．こうして，量子力学的には振り子の最低エネルギー状態は零点振動をしている状態であり，そのエネルギーは振り子の固有角振動数を ω [ラジアン/秒] として

$$\frac{1}{2}\hbar\omega\,[\text{ジュール}] \tag{1}$$

で与えられることになる．

他方，統計力学で扱う揺らぎは，分子の熱揺らぎ（熱運動・熱雑音）である．絶対温度が T [K] の多粒子系において，分子1つの運動エネルギーの熱揺らぎの大きさは，1自由度あたり

$$\frac{1}{2}k_{\mathrm{B}}T\,[\text{ジュール}] \tag{2}$$

で与えられる．花粉から出る微粒子が水中で不規則に激しく動く様子を顕微鏡で見ることができる．この運動は水分子の熱揺らぎから説明できるというのがアインシュタインのブラウン運動の理論であった．分子や原子はあまりに小さすぎて見ることはできないが，それらの熱揺らぎの効果を見ることは容易なのである．

このように並べると，確かに量子力学と統計力学を揺らぎの理論としてパラレルに見ることに意味がありそうである．ここで強調すべきことは，この基本的な揺らぎの大きさは，それぞれきっちりとその値が定まった物理定数で与えられているということである．まず (1) 式の $\hbar$ はプランク定数 $h = 6.6260755 \times 10^{-34}$ [ジュール・秒] を円周率の2倍で割ったものである．また (2) 式の k_{B} は，理想気体の状態方程式 $pV = nRT$ に現れる気体定数 $R = 8.314510$ [ジュール/モル・K] をアボガドロ数 $N_{\mathrm{A}} = 6.0221367 \times 10^{23}$ [1/モル] で割ったものであり，ボルツマン定数と呼ばれる．(2) 式は，温度が上がるにつれて熱揺らぎが大きくなるということだけではなく，その大きさが，絶対零度 -273.15 [℃] から測った絶対温度に正確に比例するということを意味している．揺らぎというと不確定でどこか捉えどころのないものを想像するのが普通ではあるが，現代物理学においては，揺らぎのスケールは精密に決定されているのである．

3. 揺らぎの起源は我々の置く設定

経済学と言うと，商品の価格は需要曲線と供給曲線との交点で表される両者の釣り合いの位置によって定まるという，アダム・スミスに始まる均衡理論を思い出す人が多いことだろう．私もその一人であるが，需要と供給とが安定に均衡する状況というものは現実には見られないというのが本当のところなのだそうだ．両者が最も平均的に均衡していると思われるオープンマーケットの価格変動は，実際には大変複雑であり，その時系列のグラフに見られるスケール不変性から，フラクタルという概念を発展させたというマンデルブロの話は有名である．それでは，この均衡点からのずれの振舞い，すなわち価格の揺らぎの起源は何であるのか？

経済学においては，均衡理論は理想的には正しいとして議論を進めるのが常道のようである．現実の市場に，均衡状態の実現やその安定性を妨げる欠陥があるために，副次的に揺らぎが生じるという考え方である．しかし，上述のオープンマーケットの例のように，ネットワークの整備などによって売り買いの条件の情報伝達をより円滑にすればするほど，短時間での売り買いが可能になるので，均衡が実現するどころか逆に価格

変動が激化してしまうというのが現実である．

経済学の均衡理論は，振り子やバネに付けられた錘に働く力とその釣り合いに対する古典力学的な議論のアナロジーである．この古典物理学的な描像に，新たに揺らぎの効果を取り込むことができたならば，その理論こそ「現代」経済学と呼ぶのに相応しい．ただし前節で注意したように，真に現代と冠するためには，その揺らぎを定量的に議論し，精密に計算できる理論が得られなければならない．

経済物理の研究者は，均衡状態というものの存在自体に疑問を持っているようである．価格の時系列がフラクタル構造をもつことと併せて考えると，安定な均衡は存在せず，むしろ（通常は相転移点近傍でのみ見られる）臨界状態と同様の状態が実現しているのではないかと考えているようである[1,3]．為替レートのデータを見ると，日銀の介入などの外的な作用が及ぼす影響は短期間に限られ，しばらくするとまた不安定な変動が復活することから，市場は自己組織化臨界現象[7]の一つであるのかもしれない．しかしここでは，素朴な古典 vs. 現代という対比で考えてみることにする．そこでまずは，量子力学と統計力学の揺らぎの起源を復習してみることにしよう．

花粉から出る微粒子やコロイド粒子のブラウン運動は，目に見えないミクロな水分子にランダムに突き動かされた結果である．それでは，水の分子の熱揺らぎの原因は何なのか．原子や分子は真空中を運動しているので，もはやそれらを突き動かすようなものは周囲に存在しない．実は熱揺らぎの原因は，「粒子系が絶対温度 T であるとき」という状況設定にあるのである．我々が部屋の温度を（快適な温度に）保つためには，窓を閉めきって部屋のエネルギーを一定に保っていたのではだめである．部屋が寒すぎれば暖房を入れて暖める（エネルギーを上げる）し，暑すぎれば窓を開けて冷たい外気を入れる（エネルギーを下げる）．つまり内と外とのエネルギーのやり取りを上手に行うことが必要なのである．これを統計力学の言葉で言うと，粒子系のエネルギー E をうまく分布させるということになる．そして，うまい分布とはボルツマン因子と呼ばれる重み $\exp(-E/k_{\rm B}T)$ の下での分布を意味するのである．

ここで考えたエネルギーとは，部屋全体のエネルギー，すなわち粒子系の全エネルギーである．いまこのエネルギーが分布するといったが，たとえ全エネルギーが一定であったとしても，室内の分子のミクロな状態は，運動方程式に従って刻一刻と変化するはずである．一般に，全エネルギーは同じ値 E であるがミクロには異なる状態はたくさんある．その数 $\Omega(E)$ は，E の値が増すとともに増える．この割り増しの効果も考慮すると，絶対温度が T のときの熱揺らぎの期待値は，分配関数

$$Z = \int_0^\infty \Omega(E) e^{-E/k_{\rm B}T}\, dE \tag{3}$$

で規格化された確率密度

$$P(E) = \frac{1}{Z}\Omega(E) e^{-E/k_{\rm B}T} \tag{4}$$

を用いて，

$$\langle E \rangle = \int_0^\infty E P(E)\, dE \tag{5}$$

と与えられることになる．理想気体の場合 $\Omega(E) \propto E^{1/2}$ であり，これを上の式に代入して積分を計算すると，$\langle E \rangle = 3k_{\rm B}T/2$ となる．これは x，y，z 方向すべての揺らぎを合わせたものであるから，1 自由度あたりの熱揺らぎの値としては，その 1/3 である (2) ということになるのである．

「温度が T のとき」という，原子や分子にとってはたいへん曖昧な条件を設定したために，ミクロな状態が確定されず，結果としていろいろなエネルギー状態が分布した混然とした状況が実現されることになる．したがって，例えば水の分子にしてもその運動エネルギーの値は変動することになり，それを熱揺らぎと呼んだのである．

量子力学の揺らぎ (1) はハイゼンベルクの不確定性原理に基づくとは言ったが，これも我々が置く状況設定と無縁ではない．量子力学では，古典力学の力学変数を演算子に置き換える．ここでは，位置の演算子を x，運動量の演算子を p で表すことにする．振り子の錘の質量を m として，また虚数単位を $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$ と書くことにする．このとき，x と p の 2 つを

$$\mathsf{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\,\mathsf{x} + \mathrm{i}\frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\,\mathsf{p} \tag{6}$$

のように重ね合わせると，これはエネルギーを下げる演算子になることが示せる．振り子のエネルギーが最低の状態は，したがってそれ以上はエネルギーが下げられないという条件

$$\mathsf{a}|0\rangle = 0 \tag{7}$$

を満たす状態 $|0\rangle$ ということになる．量子力学ではこ

れだけのことである．この基底状態は決してふらついたりするようなものではない．これはハミルトニアンの固有状態であり，したがって時間的に変動することはないからである．この状態のエネルギー固有値が (1) に他ならない．

問題は，この状態 $|0\rangle$ というものが，我々が棲んでいる 3 次元実空間の中のベクトルではないということである．しかしそれを何とか直観的に理解したいがために，我々は，これを実空間の関数として表現するという設定を置くのである．その結果得られるのが，位置ベクトル（いまの場合は，振り子の変位 x）の関数であるところの波動関数であり，

$$\begin{aligned}\langle x|0\rangle &= \psi_0(x)\\ &= \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}\exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2\right)\end{aligned} \tag{8}$$

と定められる．「マクロな物体の運動状態を記述するのに適している実空間での位置 x というものを使ってミクロな量子状態を記述する」という設定を置いた結果，その位置 x は確率密度

$$\begin{aligned}P(x) &= |\psi_0(x)|^2\\ &= \sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}}\exp\left(-\frac{m\omega}{\hbar}x^2\right)\end{aligned} \tag{9}$$

で与えられるように，釣り合いの位置 $x=0$ の周りに空間分布することになる．同様に，運動量も $p=0$ の周りに分布することになる．この状況を，古典的な描像に基づいて「(零点) 振動」と呼んだのである．

温度一定の状況を課すことも，位置の関数として量子状態を記述しようとすることも，マクロなレベルでの実験を想定すれば，自然な設定である．同様に，為替レートや株価を物理的な実時間の関数として追い，その揺らぎを議論するということも自然な設定であろう．しかし現代物理学が示唆することは，マクロな観測者が自然と思って置く設定そのものが揺らぎ（不確定性）の原因になってしまうという可能性である．現場で取引をするディーラーの「心理時間」なるものを導入して経済データを捉え直そうとする高安美佐子氏の試み[8]は興味深い．

4.「平均値と分散」から「分布そのもの」へ

統計力学はミクロな状態の揺らぎを扱う理論である．しかし，揺らぎの分布を直接議論することはむしろ稀であり，分散 σ^2 を計算してその大小によって揺らぎの大きさを議論するのが普通である．分散とは，平均値からの偏差の 2 次のモーメントである．これで事が足りるというのは，例えば (4) 式に従って分布するエネルギーについて考えてみればわかる．この分布の平均値は多粒子系の内部エネルギーを与え，分散は比熱を与える．内部エネルギーや比熱は熱力学量であり，材料などの物性を特徴付ける物理量である．しかし 3 次以上のモーメントに対しては，一般には対応する熱力学量はないのである（スピングラスの非線形帯磁率は 4 次のモーメントの一種であり，グラス転移に伴う臨界現象を議論する上で重要である．これは興味深い例外である[9]）．

確率変数 X に対して，その値が $x \le X \le x+dx$ である確率が $P(x)dx$ であるとき，$P(x)$ を確率密度という．このとき確率変数 X の n 次のモーメントは

$$m_n \equiv \langle X^n\rangle = \int x^n P(x)dx \tag{10}$$

で与えられる．この母関数は $P(x)$ のフーリエ変換

$$\hat{P}(q) = \int e^{\mathrm{i}qx}P(x)dx \tag{11}$$

で与えられる．実際，この n 次の導関数から

$$m_n = (-\mathrm{i})^n \frac{d^n}{dq^n}\hat{P}(q)\bigg|_{q=0} \tag{12}$$

というようにモーメントが計算できる．$\hat{P}(q)$ は確率変数 X の特性関数と呼ばれる．与えられた確率変数 X の代わりに，その平均値からの偏差 $X-\langle X\rangle$ を考えれば，平均値を零にできる．そこで以下では平均値 $=0$ とする．一般に高次のモーメントは低次のモーメントとは独立である．したがって，すべてのモーメントが決定されて初めて特性関数が定まり，その逆フーリエ変換として（一意的とは限らないが）分布が定まるのである．

しかしながら，最も標準的な分布であるガウスの正規分布

$$P_{\mathrm{G}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \tag{13}$$

においては，

$$m_n = \begin{cases}\dfrac{n!}{2^{n/2}(n/2)!}\sigma^n, & n\ \text{が偶数のとき},\\ 0, & n\ \text{が奇数のとき}\end{cases} \tag{14}$$

というように，すべてのモーメントは分散 $m_2=\sigma^2$ だけで表される．このことは，特性関数 (11) がこの

場合には

$$\hat{P}_{\mathrm{G}}(q) = \exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^2 q^2\right) \tag{15}$$

で与えられることから明らかである．

この特性関数を，パラメータ μ をもつ

$$\hat{P}_{\mathrm{L}}(q;\mu) = \exp\left(-c\,|q|^{\mu}\right) \tag{16}$$

という形に拡張する（c は定数）．$0 < \mu < 2$ のとき，これを特性関数とする分布は安定分布であり[10,11]，対称レヴィ分布と呼ばれる．図 1 に $\hat{P}_{\mathrm{L}}(q;\mu)$ を逆フーリエ変換して得られる確率密度

$$P_{\mathrm{L}}(x;\mu) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} e^{-c|q|^{\mu}} \cos(qx)\,dq \tag{17}$$

を $\mu = 0.8, 1.2, 1.6, 2$ の場合に描いた．ただし $c = 1/2$ とした．$\mu = 2$ のときには，分散 $\sigma^2 = 1$ のガウスの正規分布に等しい．μ が 2 よりも小さくなると，分布は原点（平均値）の周りで鋭いピークをもち（図 1 を参照），同時に裾野での減衰の仕方は正規分布に比べて遅くなる（図 2 を参照）．実際 $x \to \pm\infty$ では，正規分布のように指数関数的ではなく

$$P_{\mathrm{L}}(x;\mu) \sim |x|^{-(1+\mu)} \tag{18}$$

という冪乗で減衰することが示せる．

分布の裾野が (18) のような冪乗で減衰する場合，$\mu < 2$ では分散は発散し（$\mu = 2$ はガウスの正規分布なので除く），$\mu \leq 1$ では平均も発散してしまう．このときには，分散をもって揺らぎの大きさを表すことはできなくなるので，通常の統計力学の感覚からすると大変特別な場合であるように思われる（このような状況は，熱平衡状態では連続的な相転移点での臨界状態でのみ実現する）．ところが，このような冪乗分布は経済現象においては，むしろあちこちに見られるのである．例えば，日本の高所得企業の所得分布には，この 30 年もの間（経済のバブル成長とその崩壊にもびくともせず）$\mu = 1$ の冪乗的な裾野が見られる[12,13]．

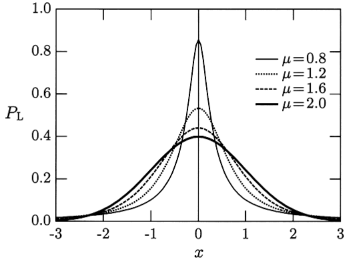


図 1　対称レヴィ分布．$\mu = 0.8, 1.2, 1.6, 2$ の場合（$c = 1/2$ とした）．$\mu = 2$ は平均零，分散 $\sigma^2 = 1$ のガウスの正規分布に等しい．μ が 2 よりも小さくなると，分布は原点（平均値）の周りで鋭いピークをもつ．

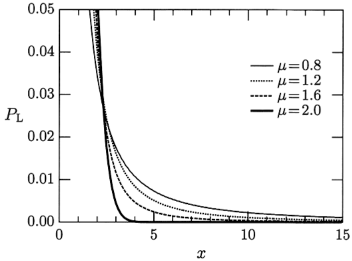


図 2　対称レヴィ分布の裾野の様子．$x \geq 0$ の領域だけ図示した．μ が 2 よりも小さくなると，裾野での減衰の仕方は $\mu = 2$ の正規分布の場合に比べて遅くなる．

分布の裾野に見られる冪乗則も興味深いが，図 1 に示した $\mu < 2$ のレヴィ分布を全体的に見ることはもっと重要である．原点（平均値）付近と裾野での確率がガウスの正規分布よりも大きくなっているということは，（確率密度は全域で積分すれば 1 になるように規格化されているので）中間領域での確率は少なくなっているということである．つまり，通常は揺らぎはごく小さいものだけに限られているのであるが，稀に（しかし正規分布と比べるとはるかに頻繁に）大変大きな揺らぎが突如として起こるという状況を表している．分散が発散してしまうというのは，通常の微小な揺らぎではなく，稀ではあるが確かに起こる大変動が，揺らぎ全体を支配していることを意味している．

指数関数的な減衰は，物理的には「実質的には無いものとして近似してよい」ということを意味する．だからこそ，残存確率が $\exp(-t/\tau)$ に従って指数関数的に減衰する放射性元素に対して，その半減期 τ を「寿命」と呼ぶのである．これに比べて，冪乗的にしか減衰しない現象は，「稀な事象」とはいってもその存在が全体に影響を及ぼす可能性があるのである．経済現象や社会現象では，大企業の倒産とか大事件とか，ごく稀な出来事が大きな影響を及ぼす．そのため，そのよ

うな稀だが重大な状況が生じると「想定」した「条件付きの理論」というものが重要になると思われる．

最近私は，実現確率が冪乗的に減衰する状況を条件として課した確率過程の一つとして，非衝突乱歩系（non-intersecting random walk または vicious walk）あるいはその連続版である非衝突拡散過程に興味をもっている[14,15]．1 次元上に N 個のブラウン粒子をそれぞれお互いに離れた位置に置いてスタートさせる．この N 粒子系において，粒子衝突がまったく起こらない確率は $t^{-N(N-1)/4}$ というように時間について冪乗的に減衰することが示せる．それでは，衝突がないという条件の下では，粒子はどのように運動するように見えるであろうか．どの粒子も衝突しないという「稀だが重要な想定」の下では，粒子間には距離に反比例する長距離の斥力が働くことが示せるのである．面白いことに，これはランダム行列の固有値分布の理論と関係する[16]．多数の異なる資産の価格変動の間の相関行列を解析するのにランダム行列理論が使われるなど[4]，経済物理はランダム行列理論の新しい応用分野にもなっている．

5. おわりに

物事の必然性を説くには，どのような状況を想定しているのかを限定しなければならない．そして，想定に反して起こった事象に我々は偶然性を見る．この小文で私は，現代物理と言えども，「複雑な自然現象を我々人間がどのように理解したいか」という問題設定に，その記述が大いに依存してしまうということを注意したかった．自然科学としてそんなことは当然であるという読者もいらっしゃるだろう．しかし，自然科学の手法を社会現象に転じようとするとき，考えるべき状況の設定，すなわち想定の作業こそが重要であると思うのである．

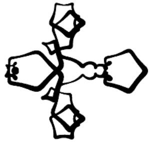
素粒子物理学では「力の統一理論」の研究が盛んであり，それを基礎に宇宙の進化が議論されているようである．統計力学には「揺動力」という用語があるが，もしかすると 21 世紀は，物理学（自然科学）で扱う揺らぎと，経済現象などで我々が日々目の当たりにする揺らぎとを統一する「揺らぎの統一理論」というものを考える時期なのかもしれない．

参考文献

1) 高安秀樹：『経済物理学の発見』，光文社 (2004).
2) R.N. Mantegna and H.E. Stanley: An Introduction to Econophysics: Correlations and Complexity in Finance, Cambridge Univ. Press (2000); 中嶋眞澄訳：『経済物理学入門—ファイナンスにおける相関と複雑性』，エコノミスト社 (2000).
3) 高安秀樹・高安美佐子：『エコノフィジックス—市場に潜む物理法則』，日本経済新聞社 (2001).
4) J-P. Bouchard and M. Potters: Theory of Financial Risks: From Statistical Physics to Risk Management, Cambridge Univ. Press (2000); 森平爽一郎監修，森谷博之・熊谷善彫彰訳：『金融リスクの理論—経済物理からのアプローチ』，朝倉書店 (2003).
5) D. Sornette: Why Stock Markets Crash: Critical Events in Complex Financial Systems, Princeton Univ. Press (2003); 森谷博之監訳：『入門経済物理学—暴落はなぜ起こるのか？』，PHP 研究所 (2004).
6) 数理科学 2002 年 10 月号特集「エコノフィジックス最前線」，サイエンス社 (2002).
7) 香取眞理：『複雑系を解く確率モデル』，講談社ブルーバックス (1997).
8) 高安美佐子：「取引数のゆらぎと心理時間」，参考文献 6) の pp.33–37.
9) 鈴木増雄：『統計力学』，第 5 章，岩波書店 (1994).
10) W. Feller: An Introduction to Probability Theory and Its Applications, Volume II, 1971, Wiley & Sons (1971); 羽鳥裕久・大平坦訳，国沢清典監訳：『確率論とその応用』II 上，下，紀伊國屋書店 (1969).
11) 佐藤健一：『加法過程』，紀伊国屋書店 (1990).
12) T. Mizuno, M. Katori, H. Takayasu and M. Takayasu: Statistical laws in the income of Japanese companies, "Empirical Science of Financial Fluctuations: The Advent of Econophysics" (H. Takayasu ed.), pp.321–330, Springer, Tokyo (2002); http://xxx.lanl.gov/abs/cond-mat/0308365.
13) 正確に言うと，所得が非常に大きい 100 社くらいは冪乗分布からはずれ指数関数的に少なくなる．ここでは単純化して対称レヴィ分布を議論したが，実際のデータ解析では，切断レヴィ分布など補正された分布関数が使われる．
14) 香取眞理：非衝突乱歩系・シューア関数・ランダム行列，「応用数理」**13**, 16–27, (2003).
15) 香取眞理，種村秀紀：ランダム行列と非交叉過程「数理物理 2005 予稿集」, pp.43–64, 東京大学 (2005); 小嶋泉編：『数理物理への誘い』**6**, 遊星社（出版予定）.
16) 永尾太郎：『ランダム行列の基礎』，東京大学出版会 (2005).

（かとり・まこと，中央大学理工学部）

量子情報における確率論



大矢　雅則

ここ数年，通信技術は大きく発展してきたが，それも，光ファイバーを用いてデジタル変調方式によって通信を行うといった半古典的なもので，完全に量子的なものにはまだ至ってはいない．この光通信を完全に量子論的なものにする技術が開発されれば，通信の効率もさらに上がるであろう．その意味で，通信技術は，21 世紀において，さらに発展するものと考えられている．私の研究室でも，1980 年代より，ここ 20 年ほど，完全に量子的な通信とは何かを考え，量子チャネルの数理，量子相互情報量の定式化，量子テレポーテーションなどの厳密な理論的研究を行ってきたが[2,4]，欧米でも量子確率などの研究者がこの種の研究を行っており，こうした研究を通して，近々完全な量子通信が実現されることが期待されている．

この量子通信や後述する量子コンピュータの理論的研究を含む体系が量子情報理論（QIT）であり，それに工学的技術を付加したものが量子情報科学（QIS）である．

歴史的に見て，量子情報理論は，確率論をベースとしたシャノン流の古典的な情報理論では扱えない量子的な対象――例えば，光の状態やさらに一般的な量子エンタングルド状態（2 つ以上の系の干渉性を包含した状態）――を用いた情報の表現と通信を，量子確率論や量子エントロピー論[1,10]をベースにして取り扱う理論である．この量子情報の研究の数理的な側面は，量子力学とそれに関わる数学，例えば，ヒルベルト空間論はもとより，作用素代数，微分幾何，非可換確率，整数論，複雑さの理論などと関わりがあり，一方，工学的側面では，21 世紀のコンピュータと期待されている量子コンピュータなどと深く関わっている．こうした関わりを持つ数理物理的理論が量子情報理論であり，さらに，シャノンの情報通信理論がそうであったように，この量子情報理論の研究も，それを通じて，数学や物理学などの新たな展開を可能にするものである．

最近，膨大なデータを高速に演算処理する新しい計算機システムの構築が様々な形で試みられている．その最有力の候補として実現化を期待されているのが，原子や分子それ自体が作る量子エンタングルド状態（干渉性）等を利用して高速で演算を行うことのできる量子コンピュータである．量子コンピュータが高速計算を可能にする主な理由は，量子力学に従う可逆な論理ゲートが計算ステップ数を大幅に減少させる点にあるが，これは，量子状態のエンダングルド性に大きく依存している．すなわち，量子計算は量子状態の強い干渉性を利用して，いくつかの独立な計算を一度に行うことを可能にするのである．

量子コンピュータに関わる研究には，(1) 可逆な量子論理ゲートを現実的な物理的過程として記述する研究，(2) 量子エンタングルド状態とディコヒーレンスの研究，(3) 量子コンピュータで効率よく計算を実行するための量子アルゴリズムの研究，(4) 量子テレポーテーション過程の研究，(5) 量子暗号の研究，などがある．

上記の問題 (2) に関して，ショアーはいかなる因数分解も量子アルゴリズムによると多項式時間で解けることを示した[3]．この研究の後を受けて，私とロシアのボロビッチは，量子アルゴリズムにカオス力学の状態変化を導入することによって，NP 完全問題を多項式時間で解くアルゴリズムを示した[4,5]．この NP 完全問題を解く量子アルゴリズムは，その観測に対応する部分の処理を古典計算機におけるプロセス（カオス力学の状態変化）で行っており，それ故，観測に関わる部分が実現可能になる．これは，量子コンピュータとカオスシステムとを組み合わせたカオス量子コンピュー

タとも呼び得る新しいシステムの提案である．

量子計算機の特徴は重ね合わさった量子状態の干渉性をうまく利用して行うところにあるが，干渉性を長時間維持できる量子エンタングルド状態を物理的に実現することは非常に難しく，現在行われている量子計算機の研究のほとんどが，純粋状態をベースにエンタングルド状態を作ろうとしているところに，その実現に向けての大きな障壁が存在している．したがって，量子計算の効率を少々犠牲にしても実現可能な量子エンタングルド状態とは何かを考えることは重要である．そのためには，量子エンタングルド状態の詳細な分類が必要になる．

上記の研究課題 (4) と (5) は量子通信と深く関わるもので，特に，量子テレポーテーションは，ベネット等[7]によって EPR (Einstein–Podolsky–Rosen) 状態を用いて論じられた量子通信のもっとも究極な形とも言い得るもので，これが可能になれば，量子状態は観測されると容易にその形を変えてしまい，盗聴されたことが分かるので，情報伝送のセキュリティの面でも通信の革命になるものである．ただ，この EPR 状態は物理的に実現することが非常に難しいものであるから，私とドイツのフィットナーは，コヒーレント状態という実際に使われている状態を用いて，任意の量子状態のテレポーテーションを可能にする方法を考えた[8]．

以上のような量子情報・量子コンピュータの理論的研究には

(1) 古典系の状態（確率分布・測度）に対応する量子系の状態とそれのベースとなる量子確率空間の数理，

(2) 情報量を記述する各種のエントロピーの量子系における数理的記述，

(3) 量子状態の干渉性から来るエンタングルド性に関する数理，

(4) 量子計算の基礎になる量子ビットとその変化の原理，

などがその基礎となる．

本稿では，こうした量子情報理論の数理的基礎となっている **(1)** の**量子確率**について説明しよう．量子確率論は，量子力学の数学的基礎付けのためにフォン・ノイマンによって大きく発展したヒルベルト空間論，作用素代数などの数学と深く関わっているが，本稿では，できるだけ簡単にその基礎を解説するつもりである．

1. 古典確率空間

この節で古典系の確率論の基礎について簡単に復習しよう．

Ω をある集合としたとき，Ω 上の σ–集合体 $\mathcal{F}$ とは，(1) $\Omega \in \mathcal{F}$，(2) $A \in \mathcal{F} \Longrightarrow A^c$（$A$ の補集合）$\in \mathcal{F}$，(3) $A_1, A_2, \cdots \in \mathcal{F} \Longrightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$ を満たす Ω の部分集合族のことである．$\mathcal{F}$ の元を可測集合と言い，$(\Omega, \mathcal{F})$ を可測空間と言う．さらに，関数 $\mu : \mathcal{F} \to [0, +\infty]$ が，(1) $\mu(\varnothing) = 0$，(2) $A_1, A_2, \cdots \in \mathcal{F}$ が互いに素（i.e., $A_i \cap A_j = \varnothing \quad (i \neq j)$）ならば $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$，を満たすとき，$(\Omega, \mathcal{F})$ 上の測度と言い，$(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ を測度空間と言う．さらに，測度 μ が $\mu(\Omega) = 1$ を満たすものを $(\Omega, \mathcal{F})$ 上の確率測度と言い，$(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ を確率空間と言う．

確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ が与えられた場合，元 $A \in \mathcal{F}$ を事象と言い，この事象の生起確率が $\mu(A)$ で与えられることになる．以下，話を簡単にするために，離散系の確率空間において議論を進めよう．

Ω が有限集合 $\Omega := \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$，または，可算集合 $\Omega := \{a_k ; k \in \mathbb{N}\}$ のとき，$(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ を離散確率空間と言う．このとき，$\mathcal{F}$ は Ω の部分集合の全体 $\mathcal{F} := 2^{\Omega}$，確率測度 μ は，$\mu(\{a_k\}) := p_k \geq 0 \, ({}^{\forall}k)$ かつ $\mu(\Omega) = \mu\left(\bigcup_{k=1} \{a_k\}\right) = \sum_{k=1} \mu(\{a_k\}) = \sum_{k=1} p_k = 1$ を満たす．したがって，事象 $A = \{a_{i_1}, \cdots, a_{i_m}\} \in F \ (0 \leq i_l \leq n)$ の生起する確率は，

$$\mu(A) = \mu\left(\bigcup_{k=i_1}^{i_m} \{a_k\}\right) = \sum_{k=i_1}^{i_m} \mu(\{a_k\}) = \sum_{k=i_1}^{i_m} p_k$$

となる．以後，離散確率空間を，μ の代わりに P を用いて，$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ で表すこともある．

ここで，以下の議論で大切になる同時確率と条件付き確率，期待値，分散の定義を思い起こしておこう．

任意の事象 $A, B \in \mathcal{F}$ に対して，A と B が同時に生起する確率（同時確率）は $\mu(A \cap B)$ で与えられ，$\mu(A) > 0$ であれば，事象 A が起こった後で事象 B が生起する条件付確率は，

$$\mu(B|A) := \frac{\mu(A \cap B)}{\mu(A)}$$

で与えられる．

確率空間 $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ 上で定義される関数 $f:\Omega\to\overline{\mathbb{R}}:=\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$ が，$f^{-1}((-\infty,a])\in\mathcal{F}$ $(\forall a\in\mathbb{R})$ を満たすとき，$\mathcal{F}$–可測関数であると言う．観測量はこの可測関数で表せ，その μ による期待値（測定値）分散は

$$E(f):=\int_\Omega fd\mu,\quad V(f):=E\left((f-E(f))^2\right)$$

で与えられる．特に，離散確率系での期待値は

$$E(f)=\sum f(a_k)\,p_k$$

となる．

2. 量子確率空間

2.1 ヒルベルト空間と物理量

では，量子論における確率論の基礎はどのように記述できるであろうか？ ます，その基礎となるヒルベルト空間を簡単に復習しておく．量子論における基礎となる空間はヒルベルト空間である．

ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ とは，内積が定義され，この内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle:x,y\in\mathcal{H}\mapsto\langle x,y\rangle\in\mathbf{K}$ によって定まるノルム $\|x\|:=\sqrt{\langle x,x\rangle}\geq 0$ に関して閉じている数体 $\mathbf{K}$ ($\mathbf{C}$ または$\mathbf{R}$) 上のベクトル空間である．

ここで，$\mathcal{H}$ がノルムに関して閉じているとは，$\mathcal{H}$ における任意のコーシー列が必ず $\mathcal{H}$ 内に収束先をもつこと，すなわち，ベクトル列 $\{x_n\}\subset\mathcal{H}$ が $\|x_n-x_m\|\to 0$ $(n,m\to\infty)$ を満たせば，$\|x_n-x\|\to 0$ $(n\to\infty)$ を満たす $x\in\mathcal{H}$ が存在するということである．

次に，古典系の可測関数に対応する物理量は $\mathcal{H}$ 上の作用素で表される．作用素 A とは，$\mathcal{H}$ からそれ自身への線形写像 $(A(\alpha x+\beta y)=\alpha Ax+\beta Ay)$ である．こうした作用素の中で，ノルムが有界 (i.e., $\|A\|:=\sup_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|}{\|x\|}<+\infty$) であるものを有界作用素と言い，その全体を $\mathbf{B}(\mathcal{H})$ と書く．以下，特に断らない限り，作用素と言えばこの有界線形作用素のこととする．

作用素 A に対して，A の共役作用素 A^* とは，任意の $x,y\in\mathcal{H}$ に対して $\langle A^*y,x\rangle=\langle y,Ax\rangle$ 満たすものを言う．例えば，$\mathcal{H}=\mathbb{C}^n$ のときには，行列 $A=(a_{ij})$ の共役作用素は随伴行列 $A^*=(a_{ji}^*)$ である．さらに，$A=A^*$ が成り立つような作用素のことを自己共役作用素と呼び，この自己共役作用素は量子論において**観測量**を記述するものである（厳密に言うとエルミート作用素であるが，有界作用素のみを扱うときは，自己共役作用素で十分である）．この作用素の固有値 λ は実数になる．

ここで，物理でよく用いられるブラケット記号を導入しておく．ベクトル x のことを，$|x\rangle$ と書きブラベクトルと呼び，その共役ベクトル $\langle x|$ をケットベクトルと呼ぶ．これらを用いると，x と y の内積は $\langle x|y\rangle$ と書ける．また，$x,y\in\mathcal{H}$ について

$$z\in\mathcal{H}\mapsto\langle x,z\rangle y\in\mathcal{H}$$

に移す作用素を $|y\rangle\langle x|$ と表す．この記号を用いると，自己共役作用素 A はスペクトル分解ができて，

$$A=\sum_j\lambda_jP_j\quad(\lambda_j\text{ は固有値，}P_j\text{ は射影作用素})$$

と書ける．さらに，$\mathrm{ONB}\{e_j\}$ が存在し，λ_j を繰り返し（縮退しているときは）用いることを許すと

$$A=\sum\lambda_j|e_j\rangle\langle e_j|$$

と書ける．この分解をシャッテン分解と言う．ただし，ここで固有値 $\{\lambda_j\}$ が縮退しているときにはこの分解は一意ではないことに注意しておく．なお，作用素 $|x\rangle\langle x|$ は $\mathcal{H}$ の部分空間 $\{\lambda x;\lambda\in\mathbb{C}\}$ への射影である．

2.2 量子状態

量子論では観測量はヒルベルト空間の作用素，特に自己共役な作用素で表されることを述べたが，では，状態のほうはどのように表されるだろうか．古典系における状態とは，物理量である確率変数を観測したときに得られる値（期待値）を対応付ける仕方である．このことは量子論においても変わらない．すなわち状態とは物理量にある値を与える写像である．

ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ で記述される量子力学系において，$\mathbf{B}(\mathcal{H})$ から $\mathbb{C}$ への写像 φ で，以下の 3 つの条件を満たす φ を**状態**と言う：(i) 線形性；$\varphi(c_1A_1+c_2A_2)=c_1\varphi(A_1)+c_2\varphi(A_2)$，(ii) 規格化；$\varphi(I)=1$（$I$ は恒等作用素），(iii) 正値性；あらゆる作用素 A について $\varphi(A^*A)\geq 0$．この状態 φ は規格化された $(\mathrm{tr}(\rho)=1)$ 自己共役な正作用素 ρ によって $\varphi(A)=\mathrm{tr}(\rho A)$ と表されることがわかっている．逆に，規格化された自己共役な正作用素を一つ定めれば状態が定まる．そこで，

定義 1 $\mathcal{H}$ 上の自己共役作用素 ρ で条件 $\mathrm{tr}\rho=1$，$\langle x,\rho x\rangle\geq 0$ $({}^\forall x\in\mathcal{H})$ を満たすもの（密度作用素とも呼ぶ）を状態と言う．

量子系では，有限次元の場合とは異なり，これ以外にも状態は存在する．しかし，ある種の連続性を仮定

すると，状態は密度作用素で表されるものに限られることがわかる．(このあたりの議論については例えば文献 11) を参照.)

規格化されたベクトル $x \in \mathcal{H}$ に対して $\rho := |x\rangle\langle x|$ も密度作用素となり，期待値は $\mathrm{tr}\rho A = \langle x, Ax\rangle$ で与えられる．密度作用素 ρ と σ で記述される 2 つの状態があると，これらの凸結合 $\lambda\rho + (1-\lambda)\sigma, (0 \le \lambda \le 1)$ も状態である．状態全体は凸結合について閉じているが，状態でこの凸結合に分解できないものを**純粋状態**と呼ぶ (i.e., $\lambda\rho + (1-\lambda)\sigma \Longrightarrow \lambda = 0$ か 1)．また，純粋状態でないものを**混合状態**と呼ぶ．

状態 ρ は正の自己共役作用素であるから，$\{\lambda_j\}$ が縮退しているものはその重複度だけ添字を繰り返し用いて，

$$\rho = \sum_k \lambda_k |x_k\rangle\langle x_k|$$

と表せる（シャッテン分解）．但し，$\{|x_k\rangle\}$ は互いに直交している．規格化の条件 $\mathrm{tr}\rho = 1$ より

$$\sum_k \lambda_k = 1.$$

よって，状態 ρ は規格化されたベクトル x_k で作られた射影作用素 $|x_k\rangle\langle x_k|$ の凸結合で表せることがわかる．そこで，どれか一つの λ_k が 1 で他は 0 の場合が純粋状態で，それ以外の場合が混合状態になる．

2.3 量子確率空間

以上で量子論を記述する道具は自己共役作用素である物理量と密度作用素である状態であることが解った．では，ある状態である物理量を観測したときに得られる**測定値（期待値）**はどう書けるであろうか．

物理量 $A = \sum_k \lambda_k P_k$（スペクトル分解）を状態 ρ において測定すると，得られる測定値は $\{\lambda_k\}$ のどれかであり，その各々の測定値が得られる確率は

$$p(\lambda_k) = \mathrm{tr}(\rho P_k)$$

である．

このことから，物理量 A を状態 ρ において測定するした場合の期待値は，

$$\mathrm{tr}(\rho A) = \sum_k \lambda_k p(\lambda_k)\ .$$

と計算される．量子論においては，何が実際に起こるかはどの物理量を観測するかを指定しなければならない．このように常に観測を想定するという意味で，量子論は外界との関わりを基にする開いた系の理論ということになる．

以上の議論より，量子確率空間は，ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$，射影作用素の集合 $\mathcal{P}(\mathcal{H})$，観測量を表す自己共役作用素の集合 $\mathcal{O}(\mathcal{H})$，および，量子状態の集合 $\mathcal{S}(\mathcal{H})$ で記述されることになるが，$\mathcal{O}(\mathcal{H})$ は $\mathcal{P}(\mathcal{H})$ によって作れるので，量子確率空間は以下のように定められる．

公理 2　量子確率空間は，ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$，射影作用素の集合 $\mathcal{P}(\mathcal{H})$，および，量子状態の集合 $\mathcal{S}(\mathcal{H})$ で記述される．

ここで x_k $(k = 1, 2, \cdots)$ を観測量 A の固有値 λ_k に対する固有ベクトル (i.e., $Ax_k = a_k x_k$) とし，状態ベクトル $x = \sum_k c_k x_k$, $\sum_k |c_k|^2 = 1$ を準備し，純粋状態 $|x\rangle\langle x|$ で A を観測する．このとき，λ_k を得る確率は $|c_k|^2$ であり，x は x_k に変化する．この状態ベクトルの変化 $x \to x_k$ を A の観測による波束の収縮と言う．さて，$\mathcal{H}$ を $\{x_k\}$ で生成されるヒルベルト空間とし，$\mathcal{H}_\Delta$ を Δ $(\subset \mathbb{R})$ に含まれる固有値に付随する固有ベクトルによって生成されるヒルベルト部分空間とする．つまり，

$$\mathcal{H}_\Delta = \text{closure of linear span of } \{x_k; a_k \in \Delta\}.$$

P_Δ を $\mathcal{H}$ から $\mathcal{H}_\Delta$ への射影作用素とすると，A を状態ベクトル x で測定したとき，Δ に測定値が得られる確率は

$$\mathrm{Prob}(A \in \Delta) = \|P_\Delta x\|^2.$$

で与えられる．

また，A を状態ベクトル x で測定したとき得られる期待値は

$$\begin{aligned} E_x(A) &= \mathrm{tr}\,|x\rangle\langle x|\,A = \langle x,\ Ax\rangle \\ &= \sum_k \mathrm{Pr}(A = a_k)a_k = \sum_k |c_k|^2 a_k \end{aligned}$$

となり，分散は

$$V_x(A) = E_x(A^2) - E_x(A)^2.$$

で計算される．

一方，A の固有ベクトル $\{x_k\}$ で用意された混合状態 ρ $(= \sum \lambda_n |x_n\rangle\langle x_n|)$ で A を測定したときの期待値は

$$E_\rho(A) = \mathrm{tr}\rho A = \sum_k a_k \lambda_k$$

となる．ここで，$Ax_k = a_k x_k$ である．

ここまでは，x, ρ を A の固有ベクトルで定め，その状態で A を測定したが，一般的には A で準備した状態で，他の物理量 B を測定する．このとき，期待値は

$$E_x(B) = \langle x,\ Bx \rangle, \quad E_\rho(B) = \mathrm{tr}\rho B$$

となる．

ここで古典確率空間（CPT）と量子確率空間（QPT）の記述法を表にしておこう：

	CPT	QPT
基礎空間	Ω	$\mathcal{H}$
事象	σ–集合体 $\mathcal{F}$	射影作用素の全体 $\mathcal{P}(\mathcal{H})$
観測量	実可測関数 f	自己共役作用素 A
状態	確率測度 μ	密度作用素 ρ

CPT の事象と QPT の事象には次の関係がある：

CPT	QPT
$A, B \in \mathcal{F}$	$E, F \in \mathcal{P}(\mathcal{H})$
$A \subset B$	$E \leq F$ (i.e., $\mathrm{ran}E \subset \mathrm{ran}F$)
$A \cap B$	$E \wedge F$（$\mathrm{ran}E \cap \mathrm{ran}F$ への射影）
$A \cup B$	$E \vee F$（$\overline{\mathrm{ran}E \cup \mathrm{ran}F}$ への射影）
$A^C \equiv \Omega \setminus A$	$E^\perp \equiv I - E$

なお，写像 $\varphi : \mathcal{P}(\mathcal{H}) \to [0,1]$ が $\varphi(I) = 1$, $\varphi\left(\bigcup_j E_j\right) = \sum_j \varphi(E_j)$ ($^\forall \{E_j\} \subset \mathcal{P}(\mathcal{H})$, $E_i \perp E_j$ $(i \neq j)$) を満たすとき，この写像を $\mathcal{P}(\mathcal{H})$ 上の確率測度と言うが，この写像は次の定理によって密度作用素と関係づけられる．

定理 3　Gleason の定理：$\dim \mathcal{H} \geq 3$ で φ が $\mathcal{P}(\mathcal{H})$ 上の確率測度のとき，密度作用素 ρ が存在して

$$\varphi(E) = \mathrm{tr}\rho E, \quad E \in \mathcal{P}(\mathcal{H}).$$

3. 量子確率における条件付き確率と同時確率

古典系と異なり量子系では，条件付き確率と同時確率は一般的には存在しないことがウルバニックによって議論されている．このことは古典確率と量子確率の基本的な違いであるので，本節ではこのことを少し詳しく論じよう．

古典確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ における 2 つの事象 A, B に対して，これらが同時に起こる確率は

$$\mu(A \cap B)$$

で与えられ，B が起こった後に A が起こる条件付き確率は

$$P_B(A) = \frac{\mu(A \cap B)}{\mu(B)}$$

で与えられる．

量子確率では，$F \in \mathcal{P}_\mathcal{H}$ を測定した後では，状態 ρ は

$$\rho_F = \frac{F\rho F}{\mathrm{tr}\rho F}.$$

に変わる（ルーダー，フォン・ノイマンの射影仮説）．この状態で事象 $E \in \mathcal{P}_\mathcal{H}$ を観測すると，期待値

$$\mathrm{tr}\rho_F E = \frac{\mathrm{tr}F\rho F E}{\mathrm{tr}\rho F} = \frac{\mathrm{tr}\rho F E F}{\mathrm{tr}\rho F}. \tag{1}$$

を得るが，この値は条件付き確率と見なせると思える．

ところで，古典確率のアナロジーから考えると，この条件付き確率は次のように定められる．前述の CPT と QPT の比較表によると，量子確率空間を（$\mathcal{H}$, $\mathcal{P}_\mathcal{H}$, ρ）とすると，事象 $E, F \in \mathcal{P}(\mathcal{H})$ を測定したときの同時確率と条件付き確率は，それぞれ

$$\varphi(E \wedge F), \quad \frac{\varphi(E \wedge F)}{\varphi(F)}, \tag{2}$$

で表されると思える．なお，ここで

$$\varphi(\cdot) = \mathrm{tr}\rho(\cdot)$$

とした．

では，上の 2 つの表現 (1) 式と (2) 式は同じものであろうかという疑問が生じる．

命題 4　(1) E と F が可換のとき，上の 2 つの条件付き確率は同値である：

$$\frac{\varphi(FEF)}{\varphi(F)} = \frac{\varphi(E \wedge F)}{\varphi(F)}.$$

(2) E と F が可換でないとき，$\frac{\varphi(\cdot \wedge F)}{\varphi(F)}$ は $\mathcal{P}(\mathcal{H})$ 上の確率にはならず，それ故，上の 2 つは同値でない．

証明． (1)　$EF = FE$ より，$E \wedge F = EF$ かつ $FEF = EFF = EF^2 = EF$，それ故，

$$K_\varphi(E \mid F) \equiv \frac{\varphi(E \wedge F)}{\varphi(F)} = \frac{\varphi(EF)}{\varphi(F)} = \frac{\varphi(FEF)}{\varphi(F)}.$$

(2)　任意の $x, y \in \mathcal{H}$ に対して，$z \in \mathrm{linsp}\{x, y\}$

$(z \neq x, y)$ をとる．ここで，3つの射影を

$$P_x = |x\rangle\langle x|, P_y = |y\rangle\langle y|, P_z = |z\rangle\langle z| \text{ が,}$$
$$(P_x \vee P_y) \wedge P_z = I \wedge P_z = P_z \text{ かつ}$$
$$P_x \wedge P_z = 0 = P_y \wedge P_z$$

を満たすようにとる．このとき

$$K_\varphi((P_x \vee P_y) \wedge P_z \mid F) = K_\varphi(P_z \mid F) \neq 0,$$
$$K_\varphi(P_x \wedge P_z \mid F) + K_\varphi(P_y \wedge P_z \mid F) = 0.$$

となるから，

$$K_\varphi((P_x \vee P_y) \wedge P_z \mid F)$$
$$\neq K_\varphi(P_x \wedge P_z \mid F) + K_\varphi(P_y \wedge P_z \mid F)$$

したがって，$K_\varphi(\cdot \mid F)$ は $\mathcal{P}_\mathcal{H}$ 上の確率にはならない．□

この定理から，QPT での条件付き確率は CPT と同じようには定められないことが解る．では，同時確率は CPT と同様には定められるであろうか？ CPT における同時確率は，2つの確率変数 f, g に対して

$$\mu_{f,g}(\Delta_1, \Delta_2) = \mu\left(f^{-1}(\Delta_1) \cap g^{-1}(\Delta_2)\right)$$

と表せる．ここで，Δ_1, $\Delta_2 \in F$．これの QPT への一般化は，2つの観測量 A, B に対して

$$\varphi_{A,B}(\Delta_1, \Delta_2) = \varphi(\, E_A(\Delta_1) \wedge E_B(\Delta_2))$$

と考えられる．ここで，$E_A(\cdot), E_B(\cdot)$ をそれぞれ A, B のスペクトル測度とした．つまり，

$$A = \int a E_A(da), \quad B = \int b E_B(da).$$

しかし，この $\varphi_{A,B}$ も $AB = BA$ でない限り確率測度にならないのである．

以上のことを測定過程に即して考えてみよう．A は次のように離散的なスペクトルを持つと仮定しよう．

$$A = \sum_k a_k F_k, \quad F_i \perp F_j \ (i \neq j).$$

この観測量を状態 ρ で測定値 a_k を得る確率は

$$p_k = \mathrm{tr}\rho F_k$$

となり，ρ は状態

$$\rho_k = \frac{F_k \rho F_k}{\mathrm{tr}\rho F_k} \equiv P_\rho(\ \cdot \mid F_k)$$

に変化する．A の測定の後他の観測量 B（i.e., $B = \sum_j b_j E_j$，$(E_i \perp E_j\ (\ i \neq j))$）を測定したとすると，$a_k$ の後に b_j を得る確率は

$$p_{jk} = (\mathrm{tr}\rho F_k)(\mathrm{tr}\rho_k E_j) = \mathrm{tr}\rho F_k E_j F_k$$
$$= P_\rho(E_j \mid F_K)\,\mathrm{tr}\rho F_k.$$

となる．p_{jk} は

$$\sum_{j,k} p_{jk} = 1, \quad \sum_j p_{jk} = \mathrm{tr}\rho F_k = p_k \qquad (3)$$

を満たすが，$E_j F_k = F_k E_j$ $({}^\forall j, k)$ でない限り

$$\sum_k p_{jk} = \mathrm{tr}\rho E_j$$

は満たさない．それ故，p_{jk} は CPT の意味での同時確率分布とは言えないものである．

したがって，QPT においては，条件付き確率も，同時確率も，CPT の単なる類推では，定義できないのである．それ故，これらに代わるものを考えることが必要になる．

4. 条件付き期待値, 遷移期待値, リフティング

こうした困難を回避するために様々な概念が導入されているが，ここで表題の3つの概念について説明しよう．

$\mathcal{A}$ (resp.$\mathcal{B}$) を $\mathbf{B}(\mathcal{H})$ (resp.$\mathbf{B}(\mathcal{K})$) とし，$S(\mathcal{A})$ (resp.$S(\mathcal{B})$) を $\mathcal{A}$ (resp.$\mathcal{B}$) 上のすべての状態の集合とする．このとき，写像 $\Lambda^* : S(\mathcal{A}) \to S(\mathcal{B})$ を**量子チャネル**と呼ぶ．Λ^* がアフィン性 (i.e., $\Lambda^*\left(\sum_n \lambda_n \rho_n\right) = \sum_n \lambda_n \Lambda^*(\rho_n)$, ${}^\forall \rho_n \in S(\mathcal{A})$, ${}^\forall \lambda_n \in [0,1]$, $\sum \lambda_n = 1$）を持つとき，Λ^* を線形チャネルと言い，Λ^* の共役写像 $\Lambda : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ が任意の $\{A_j\} \subset \mathcal{A}, \{B_i\} \subset \mathcal{B}$ と任意の $n \in \mathbf{N}$ に対して，

$$\sum_{i,j=1}^n A_i^* \Lambda(B_i^* B_j) A_j \geq 0$$

を満たすとき，Λ^* を**完全正（CP）**チャネルと言う．

このチャネルの拡張概念として次のリフティングがある[6]．

定義 5 連続写像 $\mathcal{E}^* : S(\mathcal{A}) \to S(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$ を $\mathcal{A}$ から $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ へのリフティング (lifting) と呼ぶ．$\mathcal{E}^*$ がアフィン性 (i.e., $\mathcal{E}^*\left(\sum_n \lambda_n \rho_n\right) = \sum_n \lambda_n \mathcal{E}^*(\rho_n)$, ${}^\forall \rho_n \in S(\mathcal{A})$, ${}^\forall \lambda_n \in [0,1]$, $\sum \lambda_n = 1$）を満たすとき，$\mathcal{E}^*$ を線形リフティングと言う．状態 $\varphi \in S(\mathcal{A})$

と任意の $A \in \mathcal{A}$ に対して，$\mathcal{E}^* \varphi(A \otimes I) = \varphi(A)$ が成り立つとき，$\mathcal{E}^*$ を**非破壊的リフティング**と言う．

ここで，物理においてよく出くわすチャネルとリフティングの例をいくつか挙げておこう．

(1) 量子観測： 正作用素値測度（POV）$\{Q_k\}$（すなわち，$Q_k \geq 0, \sum_k Q_k = I$）を用いた量子観測チャネルは，入力状態 ρ に対して次のように与えられる．

$$\Lambda^* \rho = \sum_k Q_k^{1/2} \rho Q_k^{1/2}.$$

(2) 開放系の力学： $\rho \in S(\mathcal{H}), \sigma \in S(\mathcal{K})$ を，2つの異なる系（例えば系と外界）の2つの状態とする．全系で相互作用していない（初期）状態を $\theta = \rho \otimes \sigma$ とする．全系のハミルトニアン H に対するある相互作用の後に，全体の状態は次のように変化する．

$$\mathcal{E}_t^* \rho = U_t \theta U_t^*.$$

ここで，$U_t = \exp(-itH)$ である．これは，リフティングと部分トレースの状態変化であり，すなわち，$\rho \to \Lambda_t^* \rho = \mathrm{tr}_{\mathcal{K}} \mathcal{E}_t^* \rho$ で開放系の力学に対するチャネルが与えられる．

(3) ビーム・スプリッティング： ビームスプリッティングは，以下の等距離作用素 V によって記述される．

$$V_{\alpha,\beta} : \mathcal{H} \to \mathcal{H} \otimes \mathcal{K},$$
$$V_{\alpha,\beta} |\theta\rangle = |\alpha\theta\rangle \otimes |\beta\theta\rangle, \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1.$$

ここで，$|\theta\rangle$ はコヒーレント状態ベクトルである．このリフティングとチャネルは，

$$\mathcal{E}_{\alpha,\beta}^* \rho \equiv V_{\alpha,\beta} \rho V_{\alpha,\beta}^*, \quad \rho \in S(\mathcal{H}),$$
$$\Lambda_{\alpha,\beta}^* \rho = \mathrm{tr}_{\mathcal{K}} \mathcal{E}_{\alpha,\beta}^* \rho = \mathrm{tr}_{\mathcal{K}} V_{\alpha,\beta} \rho V_{\alpha,\beta}^*,$$
$$V_{\alpha,\beta}^* V_{\alpha,\beta} = I.$$

となり，この $\Lambda_{\alpha,\beta}^*$ を減衰チャネルと呼ぶこともある．このチャネルは，光通信過程を調べる上で極めて重要な働きをする．

さて，リフティングが前に論じた条件付き確率とどう関わっているかを考えてみよう．

“条件付き” の確率的，あるいは，物理的意味は，系の状況がある事象の存在によってどのような影響（確率的）を受けるかということにある．

CPT では，すべての事象の集合は σ–集合体 $\mathcal{F}$ で表せ，得られる情報は部分 σ–集合体 $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}$ に属する事象に関わっている．$\mathcal{F}$ から $\mathcal{F}_0$ への条件付き確率は $\mathcal{F}_0$ 上の確率から $\mathcal{F}$ 上の確率への “リフティング” の仕方に関わってくる．

ここで，一つの例として，$\mathcal{F}_0$ が Ω の有限分割 $\left\{E_1, \cdots, E_n; E_i \cap E_j = \phi,\ \bigcup_{j=1}^{n} E_j = \Omega\right\}$ で生成されている場合を考えてみよう．CPT における $\mathcal{F}$ から $\mathcal{F}_0$ への，$\mathcal{F}$ 上の測度 μ に付随する，条件付き確率は

$$P(A|E_j) = \frac{\mu(A \cap E_j)}{\mu(E_j)}, \quad j = 1, \cdots, n \tag{4}$$

で与えられたが，逆に，$P(\cdot|E_j)$ が与えられれば，$\mathcal{F}_0$ 上の確率測度 μ_0 から $\mathcal{F}$ 上の確率測度 $\mathcal{E}^*\mu_0$ が次のように定められる．

$$(\mathcal{E}^*\mu_0)(A) = \sum_{j=1}^{n} \mu_0(E_j) P(A|E_j); \quad A \subseteq \Omega;\ A \in \mathcal{F}. \tag{5}$$

このリフティング $\mathcal{E}^*$ は

$$\mu_0(E_k) = (\mathcal{E}^*\mu_0)(E_k) = \sum_{j=1}^{n} \mu_0(E_j) P(E_k|E_j); \quad {}^\forall k = 1, \cdots, n$$

となれば，μ_0 に対する非破壊的リフティングである．さらに，$P(\cdot|E_j)$ が μ_0 に依らなければ，$\mathcal{E}^*$ は線形である．また，任意の線形写像

$$\mathcal{E}^* : \mathcal{P}(\mathcal{F}_0) \to \mathcal{P}(\mathcal{F}) \tag{6}$$

に対して，上記の形をとる $P(\cdot|E_j)$ と $\mathcal{E}^*$ が存在する．

ここまでの議論を，量子系のそれに拡張するために，代数的に記述しておこう．$L^\infty(\Omega, \mathcal{F})$（resp. $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}_0)$）を $(\Omega, \mathcal{F})$（resp. $(\Omega, \mathcal{F}_0)$）上の複素数を取る有界可測関数の全体とする．また，積分によって定められる確率測度 μ と可測関数 f との間の双対性を

$$\langle \mu, f \rangle (= \mu(f)) := \int_\Omega f(\omega)\, \mu(d\omega).$$

と表すことにする．

定義 6 $\mu_0 \in \mathcal{P}(\mathcal{F}_0)$, $f \in L^\infty(\Omega, \mathcal{F})$ と線形リフティング $\mathcal{E}^*$ に対して，$\langle \mathcal{E}^*\mu_0, f \rangle = \langle \mu_0, \mathcal{E}(f) \rangle$ を満たす線形写像

$$\mathcal{E} : L^\infty(\Omega, \mathcal{F}) \to L^\infty(\Omega, \mathcal{F}_0) \tag{7}$$

を**遷移期待値**と言う．

このとき $\mathcal{E}$ は

$$\mathcal{E}(1)=1, \quad f \geq 0 \Rightarrow \mathcal{E}(f) \geq 0 \tag{8}$$

を満たす．では，どのようなリフティングが条件付き確率から定められるであろうか？

定理 7 リフティング $\mathcal{E}^* : \mathcal{P}(\mathcal{F}_0) \to \mathcal{P}(\mathcal{F})$ に対して次は同値である：**(i)** $\mathcal{E}^*$ は線形かつ非破壊的．**(ii)** $\mathcal{E}^*$ が線形で $\mathcal{E}$ は "$\mathcal{E}(f_0)=f_0;\ {}^\forall f_0 \in L^\infty(\Omega,\mathcal{F}_0)$" を満たす．**(iii)** $\mathcal{E}^*$ が線形で (5) の $P(\cdot|E_j)$ は "$P(E_k|E_j)=\delta_{k,j}\ (k,j=1,\cdots,n)$" を満たす．**(iv)** $\mathcal{E}^*$ は線形で $\mathcal{F}$ 上の確率測度 μ が存在して，$P(\cdot|E_j)$ が式 (4) を満たす．

以上から，CPT におけるリフティングと条件付き確率は多くの場合 1 対 1 に対応付けられるので，リフティングを **QPT** のそれに拡張することによって条件付き確率に代わるものが考えられるであろう．

そこで，まず，$L^\infty(\Omega,\mathcal{F})$ を $\mathbf{B}(\mathcal{H})$ の部分 $*$ 代数 $\mathcal{A}$ に置き換え，$L^\infty(\Omega,\mathcal{F}_0)$ を $\mathcal{B}\subset\mathcal{A}$ を満たす $*$ 代数 $\mathcal{A}$ に置き換える．ここで，*代数とは $A,B\in\mathcal{A} \Rightarrow AB, A^*\in\mathcal{A}$ を満たすことを意味する．それ故，確率測度はその代数上の状態に置き換わる．代数 $\mathcal{A}$ 上の状態の全体は $\mathcal{S}(\mathcal{A})$ で表す．以下，ある $*$ 代数 $\mathcal{C}$ が存在して，$\mathcal{A}=\mathcal{B}\otimes\mathcal{C}$ と表せる場合を考える．写像 $\mathcal{E}^*:\mathcal{S}(\mathcal{B})\to\mathcal{S}(\mathcal{A})$ をリフティングと言い，$\mathcal{E}(I)=I$ を満たす CP 写像 $\mathcal{E}\ :\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ を遷移期待値と言った．特に，$\mathcal{E}^*:\mathcal{S}(\mathcal{B})\to\mathcal{S}(\mathcal{A})$ が，$\mathcal{E}^*\varphi(B)=\varphi(B)$，${}^\forall B\in\mathcal{B}$ を満たすとき $\varphi\in\mathcal{S}(\mathcal{B})$ に対して非破壊的と言い，$\mathcal{E}^*$ がすべての $\varphi\in\mathcal{S}(\mathcal{B})$ に対して非破壊的のとき，$\mathcal{E}^*$ は非破壊的と言った．

さらに，$\mathcal{E}^*$ が線形かつ非破壊のとき，その共役写像 $\mathcal{E}\ :\ \mathcal{A}\to\mathcal{B}$ は梅垣によって導入された条件付き期待値になる（i.e., $\mathcal{E}(B)=B$, $\mathcal{E}(AB)=\mathcal{E}(A)B$ $({}^\forall A\in\mathcal{A},\ {}^\forall B\in\mathcal{B})$）になることが示せる．

ところで $\mathcal{A}=\mathcal{B}\otimes\mathcal{C}$ で，一つの状態 $\psi\in\mathcal{S}(\mathcal{C})$ を固定したとき

$$\mathcal{E}^*:\ \varphi\in\mathcal{S}(\mathcal{B})\to\mathcal{E}^*\varphi\equiv\varphi\otimes\psi$$

で定められた $\mathcal{E}^*$ を "自明なリフティングと言う"．ここで，次の重要な命題がある．

命題 8 $\mathcal{B}=M(n;C)$（複素 $n\times n$ 行列の全体）のとき，線形な非破壊リフティング $\mathcal{E}^*:\mathcal{B}\to\mathcal{B}\otimes\mathcal{B}$ は自明なリフティングである．

したがって，量子系の議論には "線形性" か "非破壊性" のどちらかを破るリフティングが重要になる．ここで，そうしたもののうち，役に立つ 2 つの例を挙げておこう．

(1) 非線形非破壊リフティング：任意の状態 ρ に対して，その一つのシャッテン分解（1 次元スペクトル分解）を

$$\rho=\sum_n \lambda_n E_n$$

とする．今，チャネル $\Lambda^*:\mathcal{S}(\mathcal{B})\to\mathcal{S}(\mathcal{C})$ を用いて，リフティング $\mathcal{E}^*:\mathcal{S}(\mathcal{B})\to\mathcal{S}(\mathcal{B}\otimes\mathcal{C})$ を

$$\mathcal{E}^*\rho:=\sum_n \lambda_n E_n\otimes\Lambda^* E_n$$

で定め，これを**合成状態**と言う．シャッテン分解は ρ の固有値が縮退していると一意ではないので，上のリフティングは，シャッテン分解を $E=\{E_n\}$ に依存して，$\mathcal{E}_E^*$ と書くべきものである．

$$\mathcal{E}_E^*\rho:=\sum_n \lambda_n E_n\otimes\Lambda^* E_n.$$

このリフティングは状態 ρ に依っているので，線形ではない．しかしながら，

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}\mathcal{E}_E^*\rho A\otimes I &= \mathrm{tr}\sum_n \lambda_n E_n A\otimes\Lambda^* E_n\\ &= \mathrm{tr}\sum_n \lambda_n E_n A=\mathrm{tr}\rho A, \quad {}^\forall A\in\mathcal{B}\end{aligned}$$

となるから，非破壊的である．また，詳細は省略するが，このリフティングは $\mathcal{B},\mathcal{C}$ が可換代数のときは CPT における同時確率分布になることが分かっている．

(2) 線形破壊リフティング：ヒルベルト空間 $\mathcal{H},\mathcal{K}$ が存在して，

$$\mathcal{B}=\mathcal{B}(\mathcal{H}), \quad \mathcal{C}=\mathcal{B}(\mathcal{K}).$$

と表せるとする．$\mathcal{C}_0$ を $\mathcal{C}$ の可換フォン・ノイマン部分代数とすると，$\mathcal{C}_0$ は $L^\infty(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ と同一視できる．$\mathcal{E}:\mathcal{B}\otimes\mathcal{C}\to\mathcal{B}$ を遷移期待値とする．そこで，$\Delta\in\mathcal{F}$, $1_\Delta\in L^\infty(\Omega,\mathcal{F},\mu)\subset\mathcal{C}$, $B\in\mathcal{B}^+$（$\mathcal{B}$ の正値作用素の全体）に対して，写像

$$M(\Delta):B\in\mathcal{B}\to M(\Delta)(B)\equiv\mathcal{E}(B\otimes 1_\Delta)$$

を定める．ここで

$$1_\Delta(x)=\begin{cases}1 & (x\in\Delta)\\ 0 & (x\notin\Delta)\end{cases},$$

である．このとき，写像

$$\Delta \in \mathcal{F} \to M(\Delta)\,(\mathrm{I})$$

は**正作用素値測度**と言う（i.e., $M(\Delta) \geqq 0$, $\sum_{\Delta\in\mathcal{F}} M(\Delta) = 1$）．ここで，$\Omega = \mathbb{Z}$ で直交射影作用素の族 $\{F_i\}_{i\in\mathbf{Z}} \subset \mathcal{B}$ を単位 I の分解とする．このとき

$$\mathcal{E}(B \otimes 1_{\{i\}}) := \mu(\{i\})\, F_i B F_i \quad B \in \mathcal{B}.$$

で定めると，この共役写像は線形破壊リフティングである．

こうしたリフティングを用いることによって，古典系で条件付き確率を用いて定められている様々な“量”の量子系への拡張が可能になるのである．

5. 量子エンタングルメント

最後に量子情報理論の多くの部分に関わってくる量子エンタングルメントについて簡単に説明しよう．

このように，今の暗号技術は現実的な時間内では解読不可能だということに依存しているのだが，もし，量子コンピュータが実現されれば素因数分解も現実的な時間内で解くことが可能となり，状況は一変してしまう．では，量子コンピュータが現実のものとなったときにも通用するような暗号技術はあるのだろうか．そこで考え出されたのが，原理的に解読不可能な暗号技術（鍵分配法），**量子暗号**である．

量子暗号・量子テレポーテーションには，量子論特有なエンタングルド状態（絡み合った状態）が用いられる．2 つの量子系 A と B を考える．例えば，「A が 0，B が 0」な状態と「A が 1，B が 1」な状態の重ね合わせ状態（i.e., $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle \otimes |0\rangle + |1\rangle \otimes |1\rangle)$ と置いたときの状態 $|\psi\rangle\langle\psi|$）を考えてみよう．ただし，$|0\rangle$ は“0”を表すある量子状態で，$|1\rangle$ は“1”を表す量子状態である．このような状態を**エンタングルド状態**と呼び，系 A と系 B はエンタングルしていると言う．すなわち，この状態では，系 A が 0 か 1 かになる確率は半々であるが，系 A が 0 になっていれば，系 B は確率 1 で 0 になり，系 A が 1 になっていれば，系 B は確率 1 で 1 になる．つまり，系 A（系 B）の状態が決まれば系 B（系 A）の状態が確定してしまうことになる．

ここで，量子暗号の考え一つを例を挙げて説明してみよう．今，アリスは系 A，ボブは系 B にいるとし，これらが上記の状態 $|\psi\rangle\langle\psi|$ でエンタングルしているとしよう．アリスが 0 か 1 かを測定すると，確率半々で 0 か 1 が得られるが，その結果が 0 であったとすると，ボブが 0 か 1 かを測ればやはりボブも結果 0 を得ることになる．この行為を何度も繰り返すと，アリスとボブは全く同じランダムな数列，例えば 010111001 … を共有することになる．この数列はアリスとボブだけが知る共通の秘密となり，暗号の鍵とすることができるのである．こうして，エンタングルド状態を用いてアリスとボブは共通の鍵を持つことができ，それを基にして通信を行えることになる．

究極的な通信であると考えられている量子テレポーテーションでもこのエンタングル性は重要な役割を果たす．この通信過程はアリスが任意の量子状態を，そのままの形で，ボブに送る伝送過程である．これができれば，あらゆる情報は量子状態で書き表せるので，完璧な情報伝送が可能になるし，アリスが量子コンピュータで行っていた計算経過をその過程の途中でボブにバトンタッチするようなことも可能になる．さらに，SF の世界の瞬時の伝送も可能になると考える人もいる．アリスから送られる状態はアリスにとっては未知であり，しかもどんな状態でも送ることが可能でなければならない．アリス側にあり，送りたい状態を作る系を系 1 とする．アリスはこの系 1 の状態を何らかの仕方で 1 回観測した後，状態に含まれる情報をすべてボブに伝えるということはできるだろうか．残念ながらこれはできない．なぜなら，量子論によれば，1 回の測定で系の状態を完全に知ることはできないし，しかも，1 回の測定で状態は他の状態に変化してしまうからである．そこで，系 1 の状態を完全に送るためには以下のような装置とプロセスを考えることが必要になる．アリスは系 1 以外に系 2，ボブは系 3 をもち，系 1 と系 2 はエンタングルしている必要がある．

まず，系 1 と系 2 が結合して作られ番号で指示される目盛を持った測定器に，アリスは送りたい状態を入れる．すると，系 2 と系 3 の間のエンタングルド性によって，系 3 の状態が作られる．

アリスは先ほどの測定器の目盛りを読んで，その目盛りを電話等，古典的な手段でボブに伝える（ブロードキャスト）．例えば，「ランプは“3”がついているわ．」などとアリスがボブに伝えることになる．最後に，その測定結果を聞いたボブは，対応した操作を系 3 に移った状態に施す．すると，系 1 の元の状態が系 3 に復元される（系 3 に送られた状態が“鍵”によりアリスが送った元の状態に変わるのである）．

以上の操作が量子テレポーテーション過程の操作である．ところで今，ここに第三者イブがいたとして，一体イブは何をできるだろうか．イブができることは，せいぜいアリスがブロードキャストした測定結果を傍受することぐらいである．ところが，これを知っても，イブにはアリスとエンタングルした系は元々ないのだから，何もすることはできない．また，エンタングルド状態の配布の際にイブが妨害をしようとすると，量子論においては観測によって状態が破壊されてしまうという性質のため，妨害が入ったことがアリスとイブにはわかってしまう．このようにこの通信過程は非常に安全な通信過程でもあることなのである．

量子テレポーテーションには，1 回の伝送でアリスが送る状態を完全に送れるもの（完全量子テレポーテーション）と，数回の伝送で状態を完全に送るもの（不完全量子テレポーテーション）とに分けられる．情報伝送に限れば，2 回，3 回，アリスが状態を送っても構わないので，実質的な差はない．なお，完全な量子テレポーテーションのためには完全にエンタングルした状態（すなわち，いくつかの状態を等確率振幅で重ね合わされた状態）が必要であることと，このエンタングルド状態を長時間作ることは決して簡単なことではないので，完全量子テレポーテーションより不完全量子テレポーテーションのほうが，実現性が高いことは断るまでもない．Bennett 等によるプロトコルは完全量子テレポーテーションの一例であり，Ohya と Fichtner のフォック空間上のプロトコルは完全量子テレポーテーションと不完全量子テレポーテーション両方の例を与えるものである．

このようにエンタングルド状態は量子情報の研究の至る所に顔を出す基本概念ではあるが，実のところ，エンタングルド状態の判定条件や分類はヒルベルト空間が 2 または 3 次元のときしか解決されておらず，はなはだ不完全な状態である．したがって，その無限次元ヒルベルト空間の場合をも含めた厳密な解析が必要になるが，紙面の都合上割愛する[4,9]．

欧米では，現在，多くの研究者が，こうした量子情報や量子コンピュータの研究に従事している．どのくらいの年月が掛かるかはわからないが，現在の並列コンピュータより圧倒的に高速なコンピュータや，高い安全性を持った通信方式などが，現在の量子情報の基礎研究の延長線上で実現されることはほぼ確実であろう．そのための基礎数理の一つがここで解説した量子確率なのである．

参考文献

文献の数は非常に多いので，ここでは私の研究室のものを主に挙げておく．完全な文献は 4) の巻末に詳しい．

1) M. Ohya and D. Petz, "Quantum Entropy and its Use", Springer–Verlag, TMP-series, 1993.
2) 大矢雅則,『量子コンピュータの数理』, 丸善出版, 1999.
3) P.W. Shor, Algorithm for quantum computation: Discrete logarithm and factoring algorithm, Proceedings of the 35th Annual IEEE Symposium on Foundation of Computer Science, pp.124–134, 1994.
4) M. Ohya and I. Volovich, Mathematical Foundation of Quantum Information and Quantum Computation, to be published.
5) M. Ohya and I. Volovich, Quantum computing, NP–complete problems and chaotic dynamics, *Rep. Math. Phys.*, および, M. Ohya and N. Masuda, NP problem in quantum algorithm, *Open Systems and Information Dynamics*, **7**, pp33–39, 2000.
6) L. Accardi and M. Ohya (1999) Compound channels, transition expectations, and liftings, *Appl. Math. Optim.*, **39**, 33–59.
7) C.H. Bennett, G. Brassard, C. Crepeau, R. Jozsa, A. Peres, and W.K. Wootters, Teleporting an Unknown Quantum State via Dual Classical and EPR Channels, *Phys. Rev. Lett.*, **70**, 1895 (1993).
8) K-H. Fichtner and M. Ohya (2001) Quantum teleportation with entangled states given by beam splittings, *Commun. Math. Phys.*, **222**, 229–247; Quantum teleportation and beam splitting, *Commun. Math. Phys.*, **225**, 67–89.
9) V.P. Belavkin and M. Ohya (2002) Quantum entanglement and entangled mutual entropy, *Proceedings of the Royal Society of London A*, **458**, No.2 209–232.
10) 梅垣, 大矢,『量子論的エントロピー』, 共立出版, 1984.
11) 梅垣, 大矢, 日合,『作用素代数入門』, 共立出版, 1985.

（おおや・まさのり，東京理科大学理工学部）

脳における偶然と必然

甘利　俊一

1. はじめに

脳はニューロンと呼ぶ基本要素を結合した巨大なシステムである．ここは記憶や判断などの情報の管理や処理を司るだけでなく，我々の精神活動を営んでいる．意識や自由意志がどのようにして脳に宿るのか，これは哲学，認知科学，脳科学，情報科学を結ぶ大問題である．ここでそれを論ずるわけにはいかない．

ニューロンは，興奮電気パルスを発生することで情報を表現し，これを他のニューロンに伝える．パルス発生のメカニズムはよく知られており，入力信号の影響（重み付きの和）が一定レベルに到達するとパルスを生み出す．しかし，入力信号の重み付き加算は化学物質を介して行われ，当然のことながら正確ではない．雑音による揺らぎが生ずる．いや，入力がなくても揺らぎによってニューロンは，ときどきパルスを発する（自発発火）．

このような不確実な要素を多数用いるのだから，揺らぎが増幅し，我々の判断がめちゃくちゃになっても不思議ではない．確かに我々の判断や行動は，時に予測不能なひらめきを見せる．それでも，それは“でたらめ”ではなくて，それなりに合理的である．不確実な要素を用いて，脳はどのようにして合理的な判断を生み出すのか，ここに興味がある．

脳における情報の保持と処理を，決定論的なダイナミクスで記述する代わりに，確率統計的な揺らぎを伴う記述に書き換えてみることで，実際に脳が行っている情報過程をより正確に表現できるという考えがある．もちろん，多数の要素の相互作用の結果揺らぎが相殺し，結果として決定論的な記述で済むことも多い．それでも，不確定な要素から如何にして確実な処理が可能になるのか，その仕組みを解明しておくことが必要である．

一つ一つは不確実で確率的な揺らぎを伴う神経集団の中に，情報を表現し保持する仕組みを集団符号化（population coding）と言う．ニューロンの集団の中に起こる興奮パターンの確率を論じ，ここでどのくらい正確に情報が保持できるのか，さらにこの情報を用いてどのような処理を行っていくのかを議論するのである．このとき，Bayes 統計学の枠組みを用いることが多い．

本稿は，集団符号化にまつわる問題を議論すると共に，確率分布の形で表現されている情報の統合の問題に焦点を当てよう．そこでは Bayes の枠組みを超えた情報幾何による考察が重要になってくる．

2. 集団符号化と Bayes 推論

いま，n 個のニューロンからなる集団を考えよう．各ニューロンの発火頻度を $r_i, i=1,\cdots,n$ として，これをまとめて発火頻度ベクトル $\boldsymbol{r}=(r_1,\cdots,r_n)$ で表すことにする．各ニューロンの発火をスパイクとして取り扱うミクロな表現も可能であるが，ここでは簡単なほうを選ぶ．いま，この集団の外部から，刺激が入って発火を引き起こすものとしよう．刺激を s とする．このとき，各ニューロンの発火率は，確率的に揺らいで実現するから，これを確率分布 $p(\boldsymbol{r}|s)$ で表そう．脳は脳内に実現された発火ベクトル $\boldsymbol{r}$ を基に，その基の原因である s が何であったかを推論することになる．s はスカラーでもベクトルでも良いし，もっと複雑な場合もある．

一番簡単な集団符号化は，外界にある棒を見たとき，その角度を表現する神経集団の例であろう．s はこのとき，0 から 2π までの棒の角度を表すスカラーであ

る（正確には角度だから円周 S^1 上の量である）．一方，ニューロンは角度を表現する 1 次元の神経場に置かれているものとし，i 番目のニューロンは，角度 $s=2\pi i/n$ に対応するものとする．n が十分に大きいものとすれば，場を連続化し，場も角度に応じた座標を持つものとし，場の位置を示す座標を z としよう．i 番目のニューロンは，位置 $z=2\pi i/n$ に置かれたニューロンということになる．入力の角度が s のとき，場所 $z=s$ のニューロンが最も強く興奮することになる．しかしその周りのニューロンも興奮する．

そこで，入力が s のときの場所 z にあるニューロンの興奮の強さ $r(z)$ の期待値を

$$f(z|s)=E[r(z)] \tag{1}$$

と書く．すると，実際の興奮は

$$r(z|s)=f(z|s)+\varepsilon(z) \tag{2}$$

と書けるが，$\varepsilon(z)$ の項が確率的な揺らぎを示す雑音である．雑音を取り去った関数 $f(z|s)=f(z-s)$ を，符号化の調節関数 (tuning curve) と言う．雑音はニューロンごとに独立というわけにはいかないから，実際に実現する $r(z)$ は，複雑な波形である．

観測した $\boldsymbol{r}=\{r(z)\}$ は，その基となる刺激 s に関してどのくらいの情報を含んでいるだろうか．統計学の立場からするとこれは Fisher 情報量で測られる．そこで，いろいろな状況の下で Fisher 情報量が計算できる．この場合最尤推定が良い推定量となる．

一般の場合に戻って，Bayes の枠組みを調べて見よう．このとき，刺激 s に関して事前分布 $\pi(s)$ を想定する．これは，これまでの外界の経験から，どのような s がどのくらいよく出るかの想定値である．何も分からなければ一様分布に取ることもあるし，Jeffreys の事前分布と言って，リーマン計量を用いることもある．

事前分布を用いれば，刺激 s と興奮 $\boldsymbol{r}$ の同時確率分布は

$$p(s,\boldsymbol{r})=\pi(s)p(\boldsymbol{r}|s) \tag{3}$$

と書ける．$p(\boldsymbol{r}|s)$ は s が入力したときの $\boldsymbol{r}$ の確率分布である．ここから，興奮 $\boldsymbol{r}$ を見た後での刺激 s の分布，つまり事後確率分布

$$p(s|\boldsymbol{r})=\frac{\pi(s)p(\boldsymbol{r}|s)}{p(\boldsymbol{r})} \tag{4}$$

が計算できる．ここで，

$$p(\boldsymbol{r})=\int \pi(s)p(\boldsymbol{r}|s)ds \tag{5}$$

は，興奮 $\boldsymbol{r}$ が起こる確率分布であり，$p(s|\boldsymbol{r})$ の事後分布を計算するときの規格化定数である．これを無視すれば，事後確率分布は同時確率分布であり，話は簡単である．

脳は，事後確率分布を計算し，それを基に推論を進めているのであろうか．これに関しては，視知覚の心理物理に関連して状況証拠があり，そういった計算が進行している場合があるとされている．

3. 異なる証拠の融合

3.1 分布の融合

いま，同じ s に関して，異なる情報を用いた推論が 2 つあったとしよう．これを $p_1(s), p_2(s)$ とする．例えば，同じ外界の情報に関して，1 つは視覚系からの推論で視覚神経集団からの事後推論 $p_1(s)=p(s|\boldsymbol{r}_2)$ であり，もう 1 つは聴覚系を通じてくるもので聴覚系の神経興奮からの事後確率分布 $p_2(s)=p(s|\boldsymbol{r}_2)$ である．脳は，異なるチャネルを通じて得られるいろいろな情報を融合して推論する必要がある．

では，この 2 つをどう融合するのが自然であろうか．共に信頼できるとすると，足して 2 で割れば，

$$p(s)=\frac{1}{2}\{p_1(s)+p_2(s)\} \tag{6}$$

が自然に思える．もし，推論 1 と推論 2 の信頼度がそれぞれ $c, 1-c$ であったとすれば，重み付きの和

$$p(s)=cp_1(s)+(1-c)p_2(s) \tag{7}$$

が良いであろう．しかし，他に自然のものはないだろうか．例えば，両者の幾何平均

$$p(s)=c\sqrt{p_1(s)p_2(s)} \tag{8}$$

はどうだろう．ここで，c は確率分布にするための規格化定数である．

Bayes の立場に戻ろう．ここで，2 つの情報の表現 $\boldsymbol{r}_1$ と $\boldsymbol{r}_2$ があったとして，外界の情報が s のときの同時分布を

$$p(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2|s) \tag{9}$$

としよう．$\boldsymbol{r}_1$ と $\boldsymbol{r}_2$ はもちろん独立ではない．しかし，s を固定したときには両者が独立で

$$p(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2|s)=p_1(\boldsymbol{r}_1|s)p_2(\boldsymbol{r}_2|s) \tag{10}$$

が成立したとする．このとき Bayes の事後分布は

$$p(s|\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2)=\frac{p_1(s|\boldsymbol{r}_1)\,p_2(s|\boldsymbol{r}_2)}{\pi(s)p(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2)} \tag{11}$$

と書ける．だから，事前分布を一様とすると，両者を融合した事後分布は，それぞれの情報源から得られる事後分布の積の形

$$p(s|\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2)\propto p_1(s|\boldsymbol{r}_1)\,p_2(s|\boldsymbol{r}_2) \tag{12}$$

になっている．

3.2 2つの数の融合

ここで，s を固定して，2つの情報システムが，s が起こる確率（密度）をそれぞれ p_1, p_2 であるといったとしよう．この2つの確率をどう融合したら良いであろう．相加平均と相乗平均は候補であることを述べた．それ以外に，例えばこの確率が生存を表すものとしよう．一つのシステムが，生存確率がほぼゼロ（$p\approx 0$）のときに，結論として相加平均をとるのは危険すぎると考えるかもしれない．このとき，幾何平均は 0 を重視して，どちらかが 0 と言えば，融合した値に 0 をつける．

一般に，悲観的な人は確率の小さいほうを優先して安全第一で

$$\min\{p_1,p_2\} \tag{13}$$

を取るであろう．一方楽観派は，大きいほうの値を信用して

$$\max\{p_1,p_2\} \tag{14}$$

とするかもしれない．もちろん，分布 $p(s)$ を考えるときには規格化定数が必要である．

こうした考えを一般化する方策を考えよう．そのためには，確率分布間のダイバージェンス，確率分布の α 表現という考えが必要になる．

4. α ダイバージェンス

2つの確率分布 $p_1(s)$ と $p_2(s)$ の間に，その違いを表すダイバージェンス $D[p_1(s):p_2(s)]$ が導入できる．ダイバージェンスは，確率分布が等しいとき，$p_1(s)=p_2(s)$ ならば

$$D[p_1:p_2]=0 \tag{15}$$

であって，それ以外のときは正の値をとるが，距離とは違って対称である必要もないし，三角不等式を満たすとも限らない．

距離としては Hellinger 距離

$$D_H^2[p_1:p_2]=2\int\left\{\sqrt{p_1(s)}-\sqrt{p_2(s)}\right\}^2 ds \tag{16}$$

があるし，変分距離

$$D_V[p_1:p_2]=\int|p_1(s)-p_2(s)|\,ds \tag{17}$$

を用いることもできる．ダイバージェンスとしては，Kullback–Leibler (KL) ダイバージェンスと呼ばれる

$$KL[p_1:p_2]=\int p_1(s)\log\frac{p_1(s)}{p_2(s)}ds \tag{18}$$

が有名である．これをもっと一般化すると Csiszar の f ダイバージェンス

$$D_f=\int f\left(\frac{p_2(s)}{p_1(s)}\right)p_1(s)ds \tag{19}$$

がある．f は $f(1)=0$ を満たす凸関数であり，$f(u)=-\log u$ の場合が，KL ダイバージェンスである．

情報幾何の基本に立ち戻ると，確率分布全体からなる空間の幾何学構造，とくにその α 平坦性に起因して，α ダイバージェンスが自然に導かれる．これは確率変数の変換に関する不変性を保持していて，具体的には

$$D_\alpha[p_1:p_2]=\begin{cases}\frac{4}{1-\alpha^2}\left\{1-\int p_1(s)^{\frac{1-\alpha}{2}}p_2(s)^{\frac{1+\alpha}{2}}\right\}ds, & \alpha\neq\pm1,\\ \int p_1(s)\log\frac{p_1(s)}{p_2(s)}ds, & \alpha=-1,\\ \int p_2(s)\log\frac{p_2(s)}{p_1(s)}ds, & \alpha=1\end{cases} \tag{20}$$

と書ける．これを α ダイバージェンスと呼ぶ．これは，$\alpha=\pm1$ のところで不連続に見えるかもしれない．しかし，次式で $\alpha\to 0$ の極限を注意深くとれば，

$$\lim_{u\to 0}\frac{1}{u}(p^u-1)=\log p \tag{21}$$

に着目するとすべてがつながっていることが分かる．

$\alpha=-1$ の場合が KL ダイバージェンス，$\alpha=0$ の場合が Hellinger 距離の2乗，$\alpha=1$ の場合が，KL ダイバージェンスで p_1 と p_2 とを逆にしたものである．

α ダイバージェンスは

$$D_\alpha[p_1:p_2]\geq 0 \tag{22}$$

を満たし，さらに p_1 と p_2 とが近い場合にはテイラー展開によって

$$D_\alpha[p_1:p_2] \approx \frac{1}{2}\int \frac{\{p_1(s)-p_2(s)\}^2}{p_1(s)}ds \quad (23)$$

となることが分かる．これは，確率分布のなす空間にリーマン的な距離を定義するもので，分布がパラメータ $\boldsymbol{\theta}$ によって指定される $p(s,\boldsymbol{\theta})$ となっている場合には

$$D_\alpha[p(s,\boldsymbol{\theta}):p(s,\boldsymbol{\theta}+d\boldsymbol{\theta})] \approx \frac{1}{2}\sum g_{ij}(\boldsymbol{\theta})d\theta_i d\theta_j \quad (24)$$

となる．ここに，g_{ij} は Fisher 情報行列であり，これが確率空間族の空間のリーマン距離であった．

5. 情報融合の α 基準

話を一般に戻して，いま，$p_1(s),\cdots,p_n(s)$ の n 個の確率分布があり，それぞれの信頼度が $\pi_i, i=1,\cdots,n$ であったとしよう．これを融合して 1 個の確率分布 $q(s)$ を作りたい．$q(s)$ は，各 $p_i(s)$ と大きく離れていてはいけないから，$q(s)$ から各 $p_i(s)$ への重み付きダイバージェンスの和

$$R_\alpha[q] = \sum \pi_i D_\alpha[q:p_i] \quad (25)$$

を考え，これを α リスクと呼ぼう．これを最小にする $q(s)$ は，α ダイバージェンスの意味で各 $p_i(s)$ をうまく融合したものと言える．

この最小化問題を解くために，確率分布の α 表現を導入する．これも情報幾何ですでに定義されているものである．いま，

$$l_\alpha(u) = \begin{cases} \frac{2}{1-\alpha}u^{\frac{1-\alpha}{2}}, & \alpha \neq 1, \\ \log u, & \alpha = 1 \end{cases} \quad (26)$$

とおく．確率分布 $p(s)$ の α 表現は

$$l_\alpha[p(s)] = l_\alpha\{p(s)\} \quad (27)$$

で定義される．この α 表現も $\alpha=1$ で連続につながっている．

定理 1 α 基準を最小にする α 融合分布 $q(s)$ は，α 表現で書くと，各 $p_i(s)$ の α 表現の平均で与えられる．

$$l_\alpha\{cq(s)\} = \sum \pi_i l_\alpha\{p_i(s)\}. \quad (28)$$

ただし，規格化定数を無視しているため，最後に規格化定数 c をつけて規格化する必要がある．確率分布で書くならば，c を規格化定数として

$$q(s) = c l_\alpha^{-1}\left\{\sum \pi_i l_\alpha\{p_i(s)\}\right\} \quad (29)$$

である．

証明 まず，$\alpha \neq \pm 1$ の一般の場合を証明しよう．変分法でやればよい．$q(s)$ は

$$\int q(s)ds = 1 \quad (30)$$

を満たさなければならないから，Lagrange 定数 λ の項を加えて，

$$F(q) = R_\alpha(q) - \lambda\int q(s)ds \quad (31)$$

を最小化したい．この変分は

$$\begin{aligned}&\delta F(q)\\ &= \frac{2}{1+\alpha}\left\{1-\sum \pi_i \int p_i(s)^{\frac{1+\alpha}{2}} q(s)^{\frac{1+\alpha}{2}}\delta q(s)ds\right\} - \lambda\int \delta q(s)ds\end{aligned} \quad (32)$$

と書ける．これより，α 表現を用いて

$$cq(s)^{\frac{1-\alpha}{2}} = \sum \pi_i p_i(s)^{\frac{1-\alpha}{2}}. \quad (33)$$

したがって，定理が得られる．$\alpha=1$ の場合，$\alpha=-1$ の場合も同様な論法で変分法を用いるとうまく陽に解けて，定理が証明される．

5.1 α 確率分布族と α 情報融合

n 個の確率分布 $p_1(s),\cdots,p_n(s)$ から，これらを融合して，$\boldsymbol{\theta}$ をパラメータとする次の形の確率分布の族 $q_\alpha(s,\boldsymbol{\theta}) = c l_\alpha^{-1}\left\{\sum \theta_i l_\alpha\{p_i(s)\}\right\}$ を作れる．ここに，$\boldsymbol{\theta}=(\theta_1,\cdots,\theta_n)$ は分布を指定するパラメータである．α 融合は α 確率分布族を用いた融合であった．

$\alpha=-1$ の場合は，通常の混合分布である．したがって，$\alpha=-1$ 融合分布は確率分布の通常の混合であって，各分布の信頼度 θ_i が混合の係数になる．

$$q(s) = c\sum \theta_i p_i(s), \quad c = 1/\sum \theta_i. \quad (34)$$

$\alpha=1$ の場合が指数分布族である．このとき

$$\begin{aligned}&q(s) = \exp\left\{\sum \theta_i p_i(s) - \psi\right\},\\ &\psi = -\log c\end{aligned} \quad (35)$$

であって，$\alpha=1$ 融合は，分布の対数を混合し，その結果を指数化すればよい．確率分布で考えれば，これは各分布の重み付きの冪を掛け合わせた幾何平均である．

一般の α がこれらを含むさらに広い族である．$\alpha=0$ の場合は Hellinger 距離の基準による最小化である．$\alpha=-\infty$ にすると，得られる分布は

$$q_{-\infty}(s)=c\max\{p_1(s),\cdots,p_n(s)\} \tag{36}$$

である．これは楽観派の確率分布であって，一つでも高いスコアをつける候補があればそれを採用することになる．ただし，全体に規格化定数 c がかかるから，高い確率をそのまま用いるわけではない．

$\alpha=\infty$ の場合は，この逆で悲観派となり，

$$q_{\infty}(s)=c\ \min\{p_1(s),\cdots,p_n(s)\} \tag{37}$$

である．これは安全第一に考えることに相当する．

6. 正の数の平均

平均の考えは，確率分布だけでなくて，一般の正数の場合に適用できる．いま，正数 x,y を考え，これらの α 平均を定義しよう．2つの正数の α ダイバージェンスを

$$D_\alpha[x:y]$$
$$=\begin{cases}\frac{x}{1-\alpha}+\frac{y}{1-\alpha}-\frac{1}{1-\alpha^2}x^{\frac{1-\alpha}{2}}y^{\frac{1+\alpha}{2}}, & \alpha\neq\pm1,\\ x-y+x\log\frac{x}{y}, & \alpha=1,\\ y-x+y\log\frac{y}{x}, & \alpha=-1\end{cases} \tag{38}$$

で定義する．

このとき，この2つを融合する正数 z に与えられる α リスクは

$$R_\alpha(z)=D_\alpha[z:x]+D_\alpha[z:y] \tag{39}$$

である．これを最小にするのが α 平均である．もちろん，重み付きにすることも，x,y ではなくて正数 $x_1,\cdots,x_n$ の α 平均とすることも容易である．問題は前と同様に解けて次の定理が得られる．

定理 2 正数 $x,y>0$ の α 平均 $m_\alpha(x,y)$ は

$$l_\alpha\{m_\alpha(x,y)\}=c_\alpha\{l_\alpha(x)+l_\alpha(y)\}. \tag{40}$$

ただし，c_α は $m_\alpha(x,x)=x$ となるように加えられた定数．

これは，次の性質を満たす．

$$m_\alpha(x,y)\geq m_{\alpha'}(x,y),\quad \alpha'>\alpha. \tag{41}$$

さらに，$\alpha=\infty$ ならば

$$m_\infty(x,y)=\min\{x,y\}, \tag{42}$$

$\alpha=-\infty$ ならば

$$m_{-\infty}(x,y)=\max\{x,y\}, \tag{43}$$

$\alpha=-1,1$ のときが，それぞれ相加平均，相乗平均であり，$\alpha=3$ のときは調和平均である．

α 平均は，楽観的，悲観的，相加，相乗，調和平均を含む．これは，入力信号に対して応答する多数の部分システム（エキスパート）があったときに，その出力を融合するのに使える．ここでは，信頼度をすべて等しくしたが，当然，信頼度を用いた重み付きの α 平均に拡張できる．

7. α 予測分布

Bayes 統計学に戻ろう．$\boldsymbol{\theta}$ をパラメータとする確率分布の族 $M=\{p(x,\boldsymbol{\theta})\}$ があったとし，$\boldsymbol{\theta}$ の事前分布を $\pi(\boldsymbol{\theta})$ とする．このモデルで，n 個のデータ $D=\{x_1,\cdots,x_n\}$ を独立に観測したとしよう．ここから，Bayes の事後分布

$$p(\boldsymbol{\theta}|D)=\frac{\pi(\boldsymbol{\theta})\prod p(x_i,\boldsymbol{\theta})}{p(D)}, \tag{44}$$

$$p(D)=\int\pi(\boldsymbol{\theta})\prod p(x_i,\boldsymbol{\theta})\,d\boldsymbol{\theta} \tag{45}$$

が得られる．

元の確率分布を推定するのに，事後分布を最大にする

$$\boldsymbol{\theta}_{\mathrm{MAP}}=\arg\max\ p(\boldsymbol{\theta}|D) \tag{46}$$

を選ぶのが MAP（事後確率最大推定量）で，$p\left(x,\boldsymbol{\theta}_{\mathrm{MAP}}\right)$ を推定された確率分布とする．MAP の代わりに最尤推定量を選ぶこともできる．

しかし，一つの推定量を選んでこれに固着するのではなくて，事後分布を用いて分布 $p(x,\boldsymbol{\theta})$ を融合する方法が考えられる．これが Bayes の予測分布で，

$$q(x,D)=\int p(\boldsymbol{\theta}|D)p(x,\boldsymbol{\theta})d\boldsymbol{\theta} \tag{47}$$

である．これは，元の確率分布族 M には入っていないが，KL ダイバージェンスの意味で最良の推定分布

を与えることが知られている．すなわち，真の分布を $p(x, \boldsymbol{\theta}_0)$ としたときに，観測データ $D = \{x_1, \cdots, x_n\}$ として，D に依存した分布 $q(x, D)$ の良さを KL ダイバージェンス

$$KL\left[p(x, \boldsymbol{\theta}_0) : q(x, D)\right] \tag{48}$$

で計る．データ D は真の分布 $p(x, \boldsymbol{\theta}_0)$ から発生するから，これをデータ D に対して期待値を取った

$$R\left[q(x, D)\right] = \int \pi(\boldsymbol{\theta}_0)\, KL\left[p(x, \boldsymbol{\theta}_0) : q(x, D)\right] \times \prod p(x_i, \boldsymbol{\theta}_0)\, d\boldsymbol{\theta}_0 \tag{49}$$

をリスク関数としよう．このとき，Bayes の予測分布が最良なのである．

これは，分布 $p(x, \boldsymbol{\theta})$ の融合である．それならば α 融合が考えられる．ここで分布の近さを α ダイバージェンスで計ることにし，α リスクを

$$R_\alpha\left[q(x, D)\right] = \int \pi(\boldsymbol{\theta}_0)\, D_\alpha\left[p(x, \boldsymbol{\theta}_0) : q(x, D)\right] \times \prod p(x_i, \boldsymbol{\theta}_0)\, d\boldsymbol{\theta}_0 \tag{50}$$

で定義する．このとき，α 予測分布を

$$q_\alpha(x, D) = l_\alpha^{-1}\left[\int l_\alpha\left\{p(x, \boldsymbol{\theta})\right\} p(\boldsymbol{\theta}|D)\, d\boldsymbol{\theta}\right] \tag{51}$$

で定義しよう．$\alpha = -1$ の場合が Bayes の予測分布である．

定理 3　α リスクを最小にする分布は α 予測分布である．

証明は前と同様であるからここでは書かない．Bayes の予測分布は分布の最良の推定量であるということで，勇名を馳せていた．しかし実はそれはダイバージェンスの定義，つまり KL ダイバージェンスによっていたのである．これは $\alpha = -1$ の予測分布であり，$\alpha = 1$ の場合，つまり KL ダイバージェンスで変数を入れ替えたものを取れば，幾何平均型つまり相乗平均型の予測分布が得られる．どれが良いかは場合による．

駒木は $\alpha = -1$ に相当する Bayes 予測分布の漸近理論に情報幾何を使い，$\alpha = 1$ の，つまりモデルの m 曲率が重要な役割を果たすことを証明している．この結果は予測分布に一般化でき，モデルの α 曲率が同様の役割を果たす．

8. おわりに

脳は，情報を基に直ちに推定をして結論を出すのではなくて，確率分布の形でこれを保持し，推論を行っていると考えられる．性急に結論を出すのではなくて，いろいろな証拠や過去の経験を集め，こうした確率を融合するのである．確率分布の形で表された情報をどのように融合するのが妥当であるか，これが本稿の主題である．

融合の仕方はいろいろあり，それぞれに特徴がある．悲観派から楽観派まで，相加平均から相乗平均，調和平均など，これらすべてを含む一連の融合策があり，それぞれがそれぞれの基準で最適性を持つことを示した．これが α 融合分布であり，情報幾何から得られたものである．

ここでは触れなかったが，各確率分布（エキスパート）の信頼度をどう推定するかという問題がある．これは学習によって確立していく．こうするとエキスパートのミクスチャーの α 版ができあがる．Hinton のエキスパートの積も，この一つになっている．

集団符号化には，Fisher 情報量の計算とその性質，多重表現の場合の特異性を含むモデルの扱い，ニューロン間の同期と高次相関，情報の速い読み出しとニューロンの状態の確率分布の関係，非忠実なモデルを用いたときの情報損失など，様々な問題があり，それぞれに議論されている．スパイクの時間差の非対称な性質を持つシナプス可塑性とそのもたらす性質などもホットな話題である．

不確実な揺らぎを伴うニューロンを基本要素として用いる以上，脳と確率的な情報処理とは切っても切れない関係にあると言えよう．

参考文献

1) S. Amari and H. Nagaoka: “Methods of Information Geometry”, AMS & Oxford University Press (2000).

（あまり・しゅんいち，理化学研究所脳科学総合研究センター）

分子進化の偶然と必然

伏見　譲

1. 分子進化における「ゆらぎ」と「選択」

1.1 キラリティと遺伝コードの偶然と必然

地球上の生物のすべてに共通するものを列挙してみる．

(1) 遺伝情報はヘテロ高分子（共重合体）上にその単量体配列として符号化されたものである．
(2) その高分子は核酸（ヌクレオチドの重合体）である．
(3) 暗号文字としての単量体の種類は，ヌクレオチドのキラリティ（D型，L型）の違いを用いず，ヌクレオチドの塩基部分の種類を用いている．
(4) 塩基の種類はA, T（U），G, Cである．
(5) ヌクレオチドのキラリティは片方に決まっている．
(6) その片方とはD型である．
(7) 遺伝子の塩基配列中で塩基の3連子（コドン）が蛋白質のアミノ酸1つを符号化している．
(8) 遺伝子上に符号化されているアミノ酸は20種類しかなく，その20種類は地球全生物で共通である．
(9) コドンとアミノ酸の対応表（遺伝コード表）は少しの例外を除いて地球全生物で共通である．
(10) アミノ酸のキラリティは片方に決まっている．
(11) その片方とはL型である．

必然的にそうなった項目と，偶然そうなった項目，および偶然と必然が絡んでそうなった項目がある．例えば (1) は生命の進化が物質の進化の延長線上にあるはずと考えればほぼ必然であろう．(2) は，核酸の物性を知れば知るほど，余人を持って代え難いと思えてくる．しかし核酸に代わるものがないとは言えない．(3) (5) (10) は物理的必然と言ってよい．数理的には，DDLDLL … のような符号化情報が可能であるが，それを物理的に実装することはできないのである．このようなホモキラルでない核酸や蛋白質は，2次構造（広義らせん構造）を取ることができず，立体構造に基づく分子機能を発揮し得ないからである（後出のコラム参照のこと）．

一方，(6) は偶然であろう．(11) は (6) の偶然の結果，巻き添えを食って必然的にそうなったのかも知れないが，トータルに見れば偶然と言える．

また，(7) (8) (9) は現在の遺伝コード系を人工的に多少変更することができることからも，偶然的要因があることは間違いない．例えば20種以外のアミノ酸を取り込んだ非天然蛋白質を生命分子系に作らせることができる．また，4連子の遺伝コードも使うことができる．しかし，遺伝コード表には必然的要因もたくさん見受けられる．相互作用の強さや，反応速度の速さに関わる物理化学的必然もあるし，歴史的環境の制約がもたらす歴史的必然もある．一言で言えば遺伝コード表自体が進化してきたもので，蛋白質を含む生命分子系が進化しやすいように構成されている．決して単なる約束事として決まったのではない．これの詳細に関しては本誌の既報を参照されたい[1]．

このように多くの偶然が関与する項目が地球全生物に共通していることは，地球上の全生物が共通の祖先をもち，一つの進化系統に属するという仮説の強力な状況証拠となる．

1.2 分子進化を駆動する「ゆらぎ」と「選択」

ヒトゲノム計画の成果は，地球上の生物が一つの進化系統に属するというこの仮説をますます信憑性のあるものにした．同時に発展してきた構造生物学やバイオナノテクノロジーの成果は生物が生体高分子（DNA,

RNA, 蛋白質など）という分子機械のシステムであること，生命現象の大部分はこの分子レベルに還元できることを明確に示してきた．生体高分子というナノメートルスケールの機械は 40 億年に及ぶ進化の産物である．生物進化は分子の進化に依存し，DNA 上に記録されつつ進行し，ヒトゲノムはその一つの結果を表現している．すなわち，この分子進化は生命の起源以来続いてきた天然のナノテクノロジーと天然の IT の技術革新の連鎖に他ならない．技術はある目的のために編み出される．ここで述べた天然の技術の目的は何か．それは生存し続けることに他ならない．

現存する生物は 40 億年間の環境変動にもかかわらず生存し続けることに成功した分子情報系である（ちなみに他の生物種の存在も重大な環境である）．したがって，現存する生物の有り様は目的論的説明ができる．生き延びた分子情報系は多くの場合それ自体が変化して生き延びたのであり，それが上述の技術革新につながる場合がある訳である．環境が優しくなった場合は技術がダウンしても生き延びることができるわけで，技術革新につながるかどうかとは無関係にこれを進化と言う．この進化の機構は，広い意味のダーウィン進化機構で説明できる．ダーウィン進化機構はランダム突然変異と自然淘汰の繰り返しによる遺伝的適応機構であるが，統一的に理解するためには「ランダム突然変異」も「自然淘汰」も広い意味に解釈する必要がある．その因果論的キーワードは「ゆらぎ」と「選択」である．以下に述べるように，両者とも確率論的過程と決定論的過程が混在している．

ダーウィン進化機構を用いた進化工学が成功した現代において，ダーウィン進化論の意義は 2 つあると思う．(A) 漸進的高速進化の因果的機構があり得ることを示した．(B) 現存生物のもつ合目的的性質を因果論で説明するので，結果として，生命現象の目的論的説明を許す．

2.「ゆらぎ」における偶然と必然

2.1 制御された分子多様性作出：定常期突然変異

ダーウィン進化機構は，ランダム突然変異による配列空間における盲目的ゆらぎが前提となる．これは様々な塩基配列をもつ分子のライブラリーを作ることに相当する．すなわち，分子多様性の作出が必要である．これがエントロピー増大を意味する限り知性は不要であり，したがってまた，分子生物学の知見と両立する．

ダーウィン進化機構に対立するものにラマルク進化機構がある．これは，適応突然変異を仮定するところに特徴がある．すなわち，配列空間を目標に向かって移動できるとする．ダーウィンでは突然変異の段階では進化は起こらず情報も獲得されないが，ラマルクでは突然変異の段階で既に進化が起こり，情報が獲得されている．知性があればこれは可能であろうが，知性以外の方法でそれが如何にして可能かをラマルクは語らないし，分子生物学の知見にも矛盾する．

1940 年代，分子生物学情報学派の先導者デルブリュックが，ウイルス耐性大腸菌の揺動テストを用いて，ダーウィン機構を支持しラマルク機構を否定した．大腸菌 1 匹から培養を始めた培養液中のウイルス耐性突然変異体の数が各試験管毎にどれだけ揺らぐかを測定したのである．ウイルスを投入するのは培養の最後である．ラマルク機構によれば，ウイルスが投入された環境に適応するように大腸菌は突然変異を起こすから，各試験管は培養の最後の世代で同じような数のウイルス耐性菌を生むことになろう．ダーウィン進化機構によれば，ウイルスが環境にいるかどうかとは無関係に突然変異が起こるのだから培養の初期の世代でも，最後のほうの世代でも同じ確率でウイルス耐性菌を生む．初期の頃に生んだ試験管には非常に多くのウイルス耐性の子孫がいるが，最後のほうの世代で生んだ試験管にはほんのわずかしかいないから，試験管毎に大きく耐性菌の数が揺らぐことになる．実験結果はダーウィン機構を支持したのである．

1988 年にケアンズが適応突然変異らしき現象を発見し物議を呼んだ．第 2 の栄養を代謝できない突然変異体大腸菌が第 1 の栄養を食い尽くし増殖を停止した定常期に入ってかなり経つと，第 2 の栄養を代謝できる復帰突然変異体が高頻度で出現してくることを観察した．ゲノム全体に突然変異が高頻度で起こっていることがわかり，ラマルク機構でないことはすぐわかった．定常期であるからゲノムは複製しておらず，通常の複製時ミスコピーに起因する自然突然変異とは違う突然変異の機構である．定常期でも DNA 損傷の修復作業は行われ，そのとき突然変異が起こる．組換え修復のときに突然変異が増大することがわかっている．

一般にストレス環境では突然変異率が上がると期待される．これは配列空間の探査効率を上げ，進化能を上げる機構である．もちろん致死率も高くなるが，運がよい個体は「禍を転じて福となす」ことが期待できる．集団全体が死滅する確率は，突然変異率の関数で

あり，適応度地形にも依存する．適応度地形に応じて最適突然変異率が決まるであろう．ゆらぎを制御する必然的機構が存在し，偶然に期待するのである．

2.2 制御された分子多様性作出：相同組換え

生殖には，無性生殖と有性生殖がある．性という煩雑な機構で生殖するほうが進化した生物のようであるが，それはなぜなのだろうか．性を発明した生物のほうが進化する能力が増したからである．性を一言で言うと，保証付きの分子多様性を生み出す機構である．言い換えると，無意味な文章にならないようにして遺伝文章を混ぜ合わせる過程である．専門用語では，相同組換えを可能にする機構である．相同組換えは広い意味の突然変異である．配列空間を無作為に移動する過程だからである．もちろん狭い意味では点突然変異*1) とは異なる．相同組換えに匹敵する多量の変化を点突然変異で行うと生存は保証されない．高等生物では，雄と雌の２つの性があり，これら両親の遺伝情報の混合した子が生まれる．ヒトの子はヒトであることが保証されている．その保証が付いた上で，兄弟姉妹は多様な遺伝情報の混合状態を示している．環境が変動したときに，特定の遺伝情報（クローン）が生き残る確率よりも，多様な遺伝情報のどれかが生き残る確率のほうが高い．生き残るという消極的な言い方ではなく，現在の環境により良く適応するという積極的な言い方をしても事情は同じである．

ステマー（W. Stemmer）は進化分子工学にこの性のメリットを導入し，性が分子の進化能を向上させることを実験的に示した（1994年）．試験管の中のDNA分子の性とは何か，両親とは何か．進化させたい蛋白質があるとして，その遺伝子にランダムに点突然変異を導入する．その突然変異体集団の中から，有利突然変異体（蛋白質の機能が向上した遺伝子DNA）を選び出す．そのような有利突然変異体DNAが20本得られたとしよう．この20本を「親」にする．この20本のDNAを，セクシュアルPCRという方法を使って一斉に相同組み換えさせる．これをDNAシャフリングと名付けた．得られた多種多様な遺伝情報混合物が「子供」である．この兄弟姉妹の中には，有利突然変異が多数蓄積したものが存在する．それは極度に機能の向上した蛋白質として釣り上がってくるわけである．両親の良い所をすべて持った優秀な子供を選び出す従来の育種よりも，20もの親分子の良い所をすべて持った優秀な子供分子を選び出すほうが，進化は圧倒的に速いのは当然である．ステマーは自分の技術を「分子育種」と呼んでいるが，的確な命名である．

埼玉バイオプロジェクトで，理化学研究所の柴田と太田，瀬尾は，ニワトリ培養細胞中でDNAシャフリングをする方法を開発し，高能率に新規抗体を取得することに成功した．

またノバルティスファーマの相田，浜松，内山らは偏向変異蓄積法と称する有利突然変異を高効率で蓄積する別法を開発した．突然変異の効果が統計的にほぼ独立している場合に非常に有効である．逆にこの方法で非常に効率よく酵素が耐熱化できたため，進化した蛋白質では突然変異の効果が統計的にほぼ独立で進化しやすい分子であることがわかった．

相同組み換えでは，塩基配列のゆらぎを生存がほぼ保証されたものに制御する必然的機構が存在し，その中で特に優れたものが出現する偶然に期待するのである．

2.3 化学反応・構造変化のゆらぎとその抑制機構

生物は分子機械のシステムであるから，ゆらぎを無制限に許すよりも，ゆらぎを抑制するほうが原則である．DNAの塩基配列をコピーする分子機械・DNAポリメラーゼは，DNA合成活性以外に，DNAを合成末端から加水分解する活性も持っている．これは内部矛盾ではない．消しゴム付き鉛筆が内部矛盾ではないのと同じで，間違ったら消すという校正作用である．このような分子機械が進化してきたことは，複製精度の向上，すなわち配列空間でのゆらぎの抑制が原則であることを示している．しかしまた100%の精度でコピーできないこともまた明らかである．エントロピー増大則そのものより，それを基礎とするエネルギーコストとのバランスの観点から，ある複製精度で妥協するほうが総合評価が高くなるのである．ぎりぎり妥協できる値は，淘汰とのバランスによってゲノム配列が配列空間中で局在化できるかどうかの値であって，それはゲノムDNAの長さに反比例し，適応度地形に依存する．ゆらぎを抑制すれば，DNAの情報量を増やすことができる．一方，長さが一定であれば，このぎりぎりの値を維持したほうが，環境変動に遺伝的に適応する速度が上がり有利である．進化はカオスの辺縁で起こる．

生命の分子機械系は有限温度で動いているから分子の熱的ゆらぎを必然的に伴い，生化学反応では量子遷移の確率論によるゆらぎもある．化学反応の素反応は反応速度定数で記述できるが，それは個々の分子の反

*1) 塩基配列中の一つの塩基が別の塩基に変化すること．配列空間中でハミング距離１の移動となる．

応が確率的に起こることを表現している．これではマクロな機械が示すような機械的動きは，ミクロな分子機械では期待できないことになってしまう．したがって，化学反応や構造変化のゆらぎを抑制する機構が進化してきた．現在知られているいくつかの機構を説明しよう．

一つは協同現象の利用である．幸い生体高分子は巨大分子であり，協同現象を起こす素地はある．アミノ酸 100 個からなる蛋白質なら，低分子の 100 倍のエネルギーを 100 倍のエントロピーで補償することができ，例えば，変性温度近辺までは，構造はほとんどゆらがないようにできる．

もう一つの例にカスケード反応の利用がある．単一の素反応だと確率論が前面に出てくるが，素反応が直列につながった反応経路では，もしも律速段がなければ，すなわち，各反応段の速度定数が同じならば，反応ゆらぎが抑制されるのである．

$$X_0 \xrightarrow{k} X_1 \xrightarrow{k} X_2 \xrightarrow{k} X_3 \xrightarrow{k} \ldots\ldots \xrightarrow{k} X_n \xrightarrow{k}$$

というカスケード反応を考えてみよう．まず，反応速度定数 k とは，dt の時間の間に一つの分子（通常使われる単位に従えば 1 モルの分子）が反応する確率が kdt であることを表すことに注意する．すると $[0, t+dt]$ の間に X_0 の 1 分子が反応しない確率は $P(0, t+dt) = P(0,t)(1-kdt)$．よって，$dP(0,t) = kP(0,t)dt$．これより，$P(0,t) = e^{-kt}$．$A$ を投入してから t 時間の間に n 回の反応事象が起こった結果，時間 t に X_n が出現している確率はポアソン過程として計算でき，その確率 $P(n,t)$ は，$P(n,t) = \frac{(kt)^n}{n!}e^{-kt}$.

この時間経過曲線のピークは $t = n/k$ にあり，曲線の立ち上がり時間は $\sqrt{n}/k$ の程度である．したがって X_n の出現する時間の相対ゆらぎは反応の段数 n に対して $1/\sqrt{n}$ で減少する．この現象はクロマトグラフィーの保持時間とピーク幅の比が理論段数の平方根に比例することと数学的に同じである．実際，理論段数の大きなクロマトグラフィーのピークは非常に鋭い．カスケード反応をうまく使えば機械的に反応系を制御できるし，単純な例としてはタイマーへの応用がある．

3.「選択」における偶然と必然

3.1 酔歩と適応歩行

ダーウィン進化を単純化すると配列空間上の適応度地形の山登りとみなすことができる．これを適応歩行（adaptive walk）と言う．適応度地形が針型，すなわち，ある配列だけが大きな適応度の値を持ち，他はすべてゼロとすると，適応歩行と言うよりほとんど酔歩（random walk）である．最適配列を確実に見出すには，全数調査をする以外に方法はない．塩基数が小さければダーウィン淘汰は最終的には働くが，ダーウィンの漸進的高速進化は望むべくもない．塩基数が 134 に達すると全数とは宇宙の全原子数と同じになり，もはや全数調査は事実上不可能となる．最適配列の発見はほとんどあり得ないことが偶然起こった場合だけである．ダーウィン進化の有効性は適応度地形に依存するのである．

ダーウィン進化機構が最も有効に働く理想地形は富士山型である．この場合は適応歩行は尾根筋を登坂することになり，速やかに頂上に到達できる必然的過程となる．塩基数のべき乗のオーダーの配列点を探査する必要はなく，塩基数のオーダーの尾根筋の配列点だけを探査すればよい．ただし，親配列が子配列と生存競争する場合である．親配列が参加しないときは突然変異率が一定だと，頂上には到達できない（後述）．

3.2 中立進化・中立経路

ダーウィン淘汰に偶然が入ってくるケースに，進化している集団の大きさが有限である効果がある．しかも適応度の局所地形が台地の上の場合である．このときは木村資生の中立進化が起こる．子配列に有利有害の差はないから「最適者の生存」という図式のダーウィン淘汰は働かない．有限集団のゆらぎの効果でたまたまある配列が集団全体を占めるようになることが確実に期待できる．この事情を木村は「最運者の生存」と呼んだ．これを非ダーウィン進化と呼ぶことは感心しない．筆者は，木村理論をダーウィン進化における「ゼロの発見」だと位置づけている．

RNA の試験管内進化実験に触発されて，実験分子進化の理論が作られてきた．その中に，シュスター（P. Schuster）らの中立経路の理論がある．RNA は配列が決まると最低自由エネルギーをもつ 2 次構造（2 重らせんをもつステムとループの組合せからなる構造）が計算できる．その逆問題を解く．すなわち，ある特定の 2 次構造の形状を与える塩基配列を求めよ．大部

分の形状に対して，解の塩基配列は配列空間の端から端まで分布しており，しかも 2 重点突然変異で次々に飛べるように分布している．これを中立経路と呼ぶ．中立経路は配列空間に張り巡らされたネットワークで，この空間をパーコレートしている．4 種塩基だとパーコレートするが，2 文字だとパーコレートできない．中立経路上のある点は，別の 2 次構造の中立経路の点と点突然変異で飛べる距離にある．そこでは狭い意味のダーウィン淘汰による適応進化が起こる．分子進化は中立経路上の酔歩とインターチェンジ近辺での適応歩行の繰り返しである．これは配列空間における適応度地形のイメージに革新をもたらした．一つの峰から，向こうに見えるさらに高い峰に登るのに，谷を下る必要はない．高い峰の中腹に至る中立経路が存在するからである．

中立進化は分子機能が良くも悪くもならないケースだから，塩基配列の単なる変化であって進化と呼ぶべきでない，という意見がある．しかし，上述の中立経路を介した適応進化の繰り返しというイメージは，中立進化はインターチェンジを探査する行程であって，分子進化の必須の行程であり，単なる変化ではない．この意味で中立進化はダーウィン進化におけるゼロの発見である．

3.3 自由適応度と生物学的情報量[2)]

適応歩行で，生存競争に親が参加しないときは，頂上に到達できず，山塊の中腹にトラップされてしまうと上で述べた．トラップされる高さは当然，適応度 W が最大の点ではないが，「自由適応度」G が最大の点として特徴づけられる．

$$G = W + TS.$$

S はその高度を与える配列の数の対数に比例するエントロピーである．G が上述のような性質を持つように T を設定すると，めでたく，T は突然変異率 μ と集団の大きさ N で決まる量となり，まさにゆらぎを与える物理量で，進化的温度と呼ぶにふさわしい．熱力学の自由エネルギーの表式と異なり，負号ではなく正号が出てくるのは，アトラクターが最小値か最大値かの違いである．

いずれにせよ，有限温度では，平衡状態のアトラクターはエネルギー最小ではなく自由エネルギー最小であるように，有限突然変異率と有限集団では，進化のアトラクターは適応度最大ではなく自由適応度最大である．

物理量の変化分で上式並びに，それに対応する熱力学関係式を書くと

$$\frac{\Delta G}{T} = \frac{\Delta W}{T} + \Delta S, \text{ (進化)},$$
$$-\frac{\Delta G}{T} = -\frac{\Delta H}{T} + \Delta S, \text{ (熱力学)}.$$

これらは次のように書き換えられる．

$$\Delta I_{\text{Bio}} = \Delta I_{\text{Fit}} - \Delta I_{\text{Shanon}}, \text{ (進化)},$$
$$\Delta S_{\text{Universe}} = \Delta S_{\text{Environment}} + \Delta S_{\text{System}}, \text{ (熱力学)}.$$

最後の式は熱力学第 2 法則を宇宙のエントロピーが最大になるのが平衡状態のアトラクターであると述べたものである．右辺第一項を比較すると，系が熱を出すと環境のエントロピーが増大するのと同じように，淘汰（適応度の増加）によって系は環境から適応度情報量 I_{Fit} と呼ぶべき情報の「価値」を獲得する．これから通常の塩基配列の制限から来るシャノンの情報量 I_{Shanon} を差し引いたものが分子進化のアトラクターとなる量で，これは生物学的情報量と呼ぶにふさわしい．分子進化は生物学的情報量をなるべく多く獲得しようとする過程である．

参考文献

1) 伏見　譲，相田拓洋，別冊・数理科学「生命情報科学の拡がり」（サイエンス社，2001）pp.176–183.
2) T. Aida, S. Morinaga, Y. Husimi, *Bull. Math. Biol.* **66**, 1371–1403 (2004).
3) 伏見　譲，『DNA と遺伝子情報の物理』（岩波講座 物理の世界，2005）.

（ふしみ・ゆずる，埼玉大学工学部）

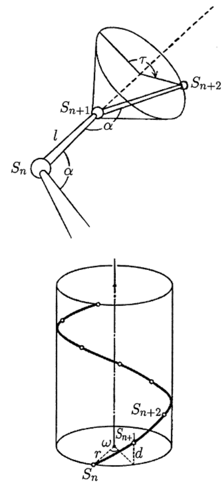
コラム：DNA 2 重らせん構造は実は 1 重らせん

DNA を形成する 4 種ヌクレオチドの重合体は，方向性のある直鎖状高分子である．方向性のある主鎖の上に 4 種の側鎖（塩基）が並んでいる．これは 4 文字アルファベットからなる文章の構造と同じである．実際，核酸分子上のこの 4 種塩基の並び，すなわち，塩基配列こそ，遺伝情報に他ならない．塩基配列は核酸の 1 次構造とも呼ばれる．

ここで問題となることは，書き込める文字列にえこひいきが無いかという点である．Yes が書けて No が書けないようなモノには情報を載せることはできない．2 重らせん中で片方の一本鎖の A, T, G, C は必ず，もう一方の一本鎖の T, A, C, G とそれぞれ対合しているが，これらの AT 対，TA 対，GC 対，CG 対をワトソン・クリックの相補的塩基対と言う．相補的塩基対はすべて合同な 2 等辺 3 角形（の下半分と言うべきか）をしているのである．すなわち，塩基対の中央に擬 2 回対称軸がある．

一方，次のような幾何学の定理がある：合同な単位からなる 1 次元系の規則構造は広義のらせん構造である．「広義」という意味は，直線やジグザグおよび環状構造を右巻きらせんと左巻きらせんの境に位置する構造として，特殊ならせんと見なすということである．1 次元系のパラメターが与えられたとき，どのようならせん構造が対応するかを図 1 に示す．

すると，相補的塩基対という合同な単位からなる二本鎖 DNA は，らせん構造をとることとなる．これを 2 次構造と言う．2 重らせんは実は 1 重らせんなのである．DNA 一本鎖に ATGC4 文字アルファベットのどのような遺伝文章を書き込んだものでも，それに逆行相補な文字列を持つ一本鎖が対合すれば，常に，直径 2 nm，ピッチ 3.4 nm の右巻きらせん構造をとる分子となる．二本鎖 DNA は，任意の塩基配列（1 次構造）に対して同じ 2 次構造をとる．第一近似で同じ安定性をもつ分子となる．つまり，DNA は等重率で情報を記憶するという記憶装置の持つべき物性をもっている特殊な高分子である．シュレーディンガーが『生命とは何か』という小冊子で，遺伝子は非周期的な結晶であると予言したことは有名であるが，ここで述べた観点からはむしろ，相補的塩基対を単位とする周期的結晶と見なすべきであろう．



$$\cos\omega = \frac{1}{2}(\cos\alpha\cdot\cos\tau - \cos\alpha - \cos\tau - 1),$$

$$d^2 = \frac{l^2(1+\cos\tau)(1-\cos\alpha)}{3+\cos\alpha+\cos\tau-\cos\alpha\cos\tau},$$

$$r^2 = \frac{2l^2(1+\cos\alpha)}{(3+\cos\alpha+\cos\tau-\cos\alpha\cos\tau)^2}$$

図 1

この，直径 2 nm，ピッチ 3.4 nm のらせん構造に収まる相補的塩基対はヌクレオチドのキラリティがすべて同じ（ホモキラルな高分子）でないと実現できない．キラリティが D 型だと右巻き 2 重らせん，L 型だと左巻き 2 重らせんとなる．混在すると規則構造はとれない．

したがってキラリティがどちらか片方に決定されることは物理的必然であり，そのどちらに決定されるかは偶然である．物理的必然と言ったが，ホモキラルな高分子の機能の優位性が物理的必然なのであって，ホモキラルな高分子が合成されることが物理的必然であることはここでは述べていない．後者も必然にするには，結晶成長とか，ダーウィン進化機構とかの別の物理が必要である．

生態系における偶然

巌佐　庸

生物は野外の環境で，餌を探し，捕食者から逃れ，子供を産み，時には遠くまで移動したり休眠をしたりする．このような生物の生活とその人口動態，そして多種の間の関係を考える生物学を生態学と言う．

本稿では，偶然や不確実性というキーワードによって生態学を眺めることにしよう．

1. 生物を含むモデルは予測が難しい

偶然という言葉には，何が起こるかわからないという予測の困難，思い通りにならないという制御の難しさの意味が含まれているようだ．

ある地域に生息している多種類の生物全体と，それらの生活の基盤になっている土壌や水，気象，海流などの物理的化学的な環境を全体として１つのシステムと見なし，それを生態系と言う[1]．ある対象を生態系として捉えるときには，その自律性に注目するのが普通である．例えば完全にコントロールされた工場の中で作物を無菌状態で飼育したとすれば，それは生態系とは言いにくい．ところが同じ作物を野外に植え付けると，土壌中の様々な菌類と栄養のやり取りがあり，雑草がはびこる．除草剤や殺虫剤を用いると最初はよく効くが，しばらくすると抵抗性を持つ病害虫が現れてきて効きにくくなる．生態系と呼ぶときには，生物が作り出す系が，人間には容易には制御できない面があると感じられる意味が込められている．

1.1 生物は増殖する

一般に生物学の対象は，物理学や化学の対象に比べて予測や制御が困難と感じられることが多い．環境科学で，例えばベンゼンやダイオキシンのような化学物質が環境中に流れ出していく様子のモデリングが行われている．少しずつ形を変えながら，空間的に広がり，土壌中へ水中へと広がっていく．これらに対応した多数のコンパートメントに分けて追跡し，水や栄養塩の流入や移動といった物理的なプロセスを計算する．変数が多数になってもモデルの挙動は安定している．

これに対して，プランクトン，魚，水草，バクテリアなどといった生物が主役になる系はずっと不安定である[2]．例えば，ある生態系にそこには生息していない外来の種を導入したとき必ずしも定着するとは限らない．この成功率をあらかじめ予測することはとても難しい．一方で，たまたま入り込んだ種がいったん定着すれば，その侵入生物を取り除くことはほとんど不可能である．生態系のモデリングでは，不確定なパラメータの選び方によって，系の挙動が大きく変わってしまう．特に多数の種を含む系では，ある種の増殖率を少し低くするとたちまち絶滅してしまい，高くしすぎると今度は爆発的に増えて他の競争種を押し退けて広がり，他のいくつもの種を滅ぼしてしまう．どのようにパラメータを選ぶと自然に見られるような挙動が得られるかさえ簡単にはわからない．

生物と無生物との最も基本的な違いは，生物が繁殖するところにある．そのために，増殖率が正だと爆発的に増え，負だと絶滅する．これに対して，環境に放出した化学物質は様々な媒体の中を広がり，形が変わったり分解されたりするが，増殖はしない．

1.2 生物は進化する

増殖するという生物の持つ基本的な性質は進化をもたらす．現在はびこっているものとは少し異なるタイプ，突然変異体が現れて，元のタイプと置き換わってしまい，生物の性質が変化するという「自然淘汰による進化」が生じるのだ．

微生物では，このような進化が短い時間スケールで生じることがある．例えば，1950年代にオーストラリ

アで，作物を食い荒らすウサギを除去する目的で，ウサギに致死的な病気をもたらす粘液腫ウイルスが導入された．瞬く間にほとんどのウサギが死んだ．しかし生き残ったウサギに対しては粘液腫の致死率が下がり，ウサギとウイルスとが共存するようになった．これはウイルスに耐性を持つウサギが選抜されたことと，宿主のウサギを生かして次の宿主に感染する機会を増やすウイルス系統が有利で広がったことによる．つまり宿主であるウサギと病原体である粘液腫ウイルスの両方の進化の結果である．数百年にわたる人間の歴史を見ても，最初は患者の致死率が非常に高かった病気が，その後よりマイルドなタイプに置き換わった例が数多く見られる．

微生物が素早く進化できることは恐ろしい結果をもたらすことがある．新しい抗生物質を使用し始めるとしばらくはよく効くが，何年かすると効かなくなる．それは耐性を持つ細菌が出現し広がるためである．新しい抗生物質を開発せねばならない．しかし，しばらくするとそれにも耐性を持つ菌が出現する．これは病原体の側の適応進化によるものだ．最近は抗生物質がまったく効かない系統が現れて，医療の上で大きな問題になっている．

生態系に限らず，生物の体内でもこのような進化が生じる．例えばガンを考えてみよう[3]．皮膚や大腸，血液などといった器官には，生涯にわたって細胞分裂し続ける幹細胞（ステムセル）があり，機能を果たし終えて毎日捨てられる細胞を供給している．例えば，大腸では $10^7 \sim 10^8$ 程度の数がある．それが1週間に一度ずつ分裂を続けるので40歳までにはすべての大腸細胞が2000回以上も細胞分裂を経験することになる．

もともと細胞には勝手に分裂しないようにチェック機構が何重にも働いている．しかし長い間分裂し続けていると，幹細胞の中で細胞分裂を制御する装置の遺伝子に突然変異が生じ，ルールに従わずに分裂し続ける細胞が現れる．それらが正常細胞よりも速く増殖し，免疫系のチェックを逃れ，ついには元の組織から離れても増殖できるようになる．これがガンである．ガンは，増殖し続ける幹細胞を持つという多細胞生物の宿命とも言える．

1.3 生物学には基本方程式がない

物理学や化学の対象と比べたときに，生態学，より一般に生物学のもう一つの特徴は，幅広い現象に適用できる一般的法則がないことである．例えば地球物理学では，気象の変化，湾内の海水の流れ，太古の熱い地球が次第に冷えてくるときのマントル対流の動きといった幅広い現象が，ナビエ・ストークス方程式という1つの微分方程式によって定量的に計算できる．カオスを示すために長期での予測は困難としても，最近の天気予報のように，観測データの数が増えれば近い時刻の予想は正確に行える．

生態学のモデルではそうはいかない．森林の樹木，土壌動物，哺乳類個体群などと状況ごとに別のモデルを作ることが必要である．そのため，生態学ではモデルの対象となるシステムに関する知識とデータの量と質を十分に知っておいてから適切なモデルを選ぶプロセスが重要になる．

その意味では生態系を予測する試みは，物理学よりも社会現象を扱う経済学や社会科学でのものに近いと言えるだろう．そこではナビエ・ストークス方程式に相当する非常に幅広く成り立つ基本方程式はなく，多様な論理関係の一つ一つを手短に表現する数理経済学やゲーム理論の数理モデルと，政策決定にも用いられるような現象ごとに作られる詳細なコンピュータシミュレーションモデルの組合せで複雑な対象に迫ることになる．

2. 野生生物の絶滅リスク

生態学の対象で，確率的側面が明確に取り上げられるものとして野生生物の絶滅リスクがある．

現代はかつてない大量絶滅の時代と言われている．例えば，日本の維管束植物の20%は絶滅が危ぶまれる種である．ある推定によると1年当たりに絶滅する種の数は200年前と比べてさえ数桁も高くなっているらしい．

野外生物が絶滅の危険にさらされているときにどのように対処すればそのリスクを下げることができるのか．この問いに答えるための生物学の研究は保全生物学と呼ばれる[4]．集団の絶滅および存続という事象は長い期間での存続が問題になっていることからわかるように，調査や実験だけの研究では不十分である．野生生物の絶滅の危険の程度を見極めてランクづけをする作業にも，どのように対処すれば絶滅の危険を減らせるかを予想する上にも，様々な数理解析やコンピュータシミュレーションによる将来予測が用いられる[2]．

2.1 確率性の2つの源

現在の集団の個体数や生活の仕方をいくら丁寧に調べても，将来の変動までは予測ができない．気温や降

水量などの予測にはどうしてもある程度の幅が伴うからだ．また人間活動の活発化によって生息地が縮小する，農薬が誤って多量に流れ出して池の生物が危機に瀕するなど，人間社会が関与する「事故」も，やはりある確率で生じるとするのがよいだろう．

これらの自然の過程によってもたらされる揺らぎに加えて，我々の知識が不十分なために生じる不確実性がある．対象となる生物の集団サイズ・生存率・生活史・移動分散などは，実際にはよくわからないことが普通であるが，このような知識は絶滅リスクの予測には極めて重要だが，そもそも個体数が少なく，生存率・出産率や社会行動・移動分散などについて調査することは困難だ．しかも絶滅危惧種となれば個体数が急激に減少しつつあり，正確に予測をするためといって時間をかけて調査をすることは許されないことが多い．とすれば，比較的似た生活をしている他の種や同じ生物種の別の集団でのデータを援用して推測することになる．そこで可能なパターンの中でどれであるかをランダムに決めるといった作業により，予測に確率が入ってくる．

絶滅確率を議論するときには，どのような意味での確率性が考慮されているのかを見極めねばならない．

2.2 絶滅のリスクを推定する

では生物の絶滅の生じ方はどのように推定するのだろうか．生活がよくわかっている生物については，それは個体群動態（つまり人口変動）のコンピュータシミュレーションモデルを作ることである．ツキノワグマの集団を想定してみよう．出産率は年齢によって異なるので，年齢別の個体数を考える．年齢別の生存率・出産率が時間的に一定だと，個体数は時間とともに指数関数を描いて限りなく増加してしまう．実際には餌の不足などから密度がある程度増えると出産率が低下するので，個体数はある程度のレベルに収束するようになる．これに加えて，環境の変動を考慮する必要がある．ツキノワグマの場合にはブナなどのドングリの豊作の年にはメスの妊娠率・出産率が高くなり，凶作の年には低下すると言う．ドングリの生産量が年ごとに大きく変動するために，クマの個体数は環境収容力という平均レベルの周りを揺らぐことになる．次世代個体数は，以上の計算で得た平均値の周りにポアソン分布をすると仮定することによって，絶滅を考えるためのシミュレーションモデルができる．

ここで説明したモデルは最も簡単なものである．実際にはもっと複雑で，いくつかの地域集団に分かれていてそれらの間で行き来をしたり，餌が減って回復するのにしばらく時間がかかったりする．

生息地，年齢，生理的状態などと属性ごとに分けてそれらを持つクマの個体数を追跡すると，考える区分が多数になる．そのときには各個体をコンピュータメモリーの中に表現し，それらがルールに従って成長したり場所を移動させるような個体ベースモデルが有用になる．

単純な設定の下では確率過程の数学により絶滅時間の平均値や分散，確率分布などを計算することができる．例えば，個体数の変動は，出産による人口増大と死亡による減少とのつり合いで決まる．そこでこれを平均的な人口増加率（決定論的）とその周りでの揺らぎとに分けて考える．さらにこの揺らぎを，雌の間で同調した変動と雌ごとに独立な変動の 2 つに分ける．つまり個体数 X の変化は，

$$\Delta X = [\text{決定論的個体数変動}] + [\text{環境変動}] + [\text{人口学的確率性}]$$

という 3 つの項の和によるものと考えるのだ．

先のツキノワグマの例で言えば，ブナの豊作の年にはどの雌グマも出産率が大きく凶作の年には出産率が低い．このような環境変動によるクマの変動は現在の個体数 X に比例し平均がゼロで時間変動する項として表され，環境確率性と呼ばれる．

これに対して，雌が残す娘の数は個体ごとにばらつく面もある．ある雌クマは多数の娘を残したのに別の雌クマはたまたま雄ばかり残したという確率性である．個体ごとに独立な変動は人口学的確率性と呼ばれる．独立な変数の個の和の標準偏差が平方根に比例することから，その項の大きさも $\sqrt{X}$ に比例する．人口学的確率性は個体数 X が大きいときには環境変動に圧倒されるが，個体数が少ないと重要になる．人口学的確率性により有限時間の内に絶滅が生じる．

ここで次の式を考えてみる[5]．

$$\frac{dX}{dt} = rX\left(1 - \frac{X}{K}\right) + \sigma_e X \xi_e(t) + \sqrt{X}\,\xi_d(t). \tag{1}$$

右辺の第 1 項は平均的な個体数の変化を表す式で，ロジスティック成長を示す．r は個体数が小さいときの増殖率を表し内的自然増加率と呼ばれる．K は，その生息地で安定に維持できる個体数を表し，環境収容力と言う．しかし第 1 項だけだと個体数はなめらかに平

衡状態に収束し，絶滅は起きない．

環境確率性が第2項で，人口学的確率性が第3項で表される．$\xi_e(t)$ および $\xi_d(t)$ はホワイトノイズで短い時間で符号が頻繁に入れ替わる変動を示すものである．

長期間での存続を問題にする場合には，個体数が平衡状態に到達した後での絶滅を考えていることになる．個体数が平衡状態の周りをふらついて最終的に絶滅に至るまでの間に，通常かなり長い時間がかかる．個体数の絶滅は，世代当たり一定の確率で生じ，待ち時間は指数分布に従う．つまり絶滅はあたかもまったくランダムに生じるかのように取り扱うことが許される．平均存続時間の逆数が世代当たりの絶滅確率である．

確率微分方程式(1)については平均存続時間など様々な量が計算できる．それに基づいて r, K, σ_e, の式として表した近似式を作ることもできる[5]．

生息地の縮小，細分化，有害化学物質への暴露，病気の蔓延，遺伝的劣化，など様々な要因は，何らかの形でこのモデルの3つのパラメータ（r, K, σ_e）に反映される．この結果を用いて，環境の有害化学物質により生存率が低下する場合と，遺伝的劣化や風土病，漁業などで生存率が減少する場合，生息地の縮小した場合などを存続時間へのインパクトを規準にして比較することができる[2]．

3. 種の顔ぶれの偶然性

ある森に生息している種のリストには，樹木，草本，そして哺乳類，鳥類などと様々な生物の名前が並ぶ．これらの生物はその場所にずっと生息していると思うのが普通だろう．ところが長い年月で考えると，ある場所にいる生物は，いつもそこに居るのではなく，偶然の要素があると言う．数百年後に行ってみたら，前に居た種は居なくなって，別のものが侵入して居着いているかもしれない．つまり種の顔ぶれは，長い年月で見ると絶滅と再侵入とが繰り返されるために入れ代わるものであって，ある時点で作成した生育種のリストというのは，たまたまそのときのスナップショットなのだ．これをわかりやすく提示したのは，マッカーサーとウィルソンであった[6]．彼らは，大洋に浮かぶ多数の島について，そこに居る一群の生物種の種数を数えた．すると2つの傾向がわかった．まず，種の数は大きな島ほど多く，小さな島ほど少ない，ということ，第2に，同じ程度の大きさの島ならば，大陸に近いほど種数が多く，遠ざかるほど少なくなることだ．前節で説明したような考えで絶滅は小さな島ほど速く生じる．そうやって滅んだあと，大陸から侵入によって供給される．その絶滅と再侵入とのバランスによって島にいる種の数が決まっていると考えた．とすると，種の数はほぼ一定としてもその顔ぶれは始終入れ代わることになる．

マッカーサーとウィルソンは，大陸があって，そこから一方的に種が供給されるという状況を考えたけれども，安定な種の供給源となる大陸はなくて，多数の島が互いに交流でつながっている場合も考えられる．ある島で絶滅した種は別の島からの同種個体の再侵入によって回復するというとき，それらの多数の島全体はメタ個体群と呼ばれる．

同じ考え方は，本当の島ではなくても，例えば高山に生育する植物の種数を考える場合にも当てはめることができる．それらの一群の植物が生育できる気候を示す場所だけを「島」のように考え，生育できない低地は大洋と同じく「海」と考えるとよい．ある高山の山頂にある種数は，その場所の面積が小さくなるにつれて減り，他の場所からの侵入の可能性が高くなるとともに増える．

私たちがある生態系に行ったときに出会った種は，永遠にそこに存在し続けているという印象を持ってしまう．逆にいま居ない場所は生息に不適，と解釈をしてしまう．本当は，いま占拠しているサイトも長い間には滅び，いまは不在の場所も時間がたつと再侵入により回復し，全体として常にある割合の場所を占拠しているだけかもしれない．もし生物がいないところは不要として開発に任せるとどうなるだろうか？ 現在たまたま占めている場所が滅んだときには回復が遅れ，全体としての存続が危うくなってくる．

3.1 ランダム群集モデル

多数の種が相互作用する系の様子を調べるには，

$$\frac{dX_i}{dt} = r_i X_i \left(1 + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j\right), \quad (i = 1, 2, \cdots, n), \qquad (2)$$

というロトカヴォルテラ式がよく用いられる．括弧の中は1個体あたりの増殖率に対して他の個体がいることによる影響を表す因子で，密度に比例した影響があるとしている．ここで a_{ij} は種 j が種 i に対して与える影響を示す係数である．共通の餌や棲みかを巡って競争するために，互いにマイナスの影響を与える2種には a_{ij} はマイナスになる．i が j を餌としている

ときには j が多いほど i の個体数増殖率は改善されるので，a_{ij} は正であり，逆に j は i に食べられることから a_{ij} はマイナスである．n は種の総数を表す．

このとき，種の増殖率 r_i や相互作用のパラメータ a_{ij} や増殖率をある範囲からランダムに選ぶと，作られた系がどのようになるのかという研究が行われている．種の集まりのことを群集と言うので，これはランダム群集モデルと言う．レプリケータダイナミックスというモデルは，変数変換をすると (2) のロトカヴォルテラモデルになるため，ランダムに係数を選んだレプリケータダイナミックスについて種の組合せについて，丁寧に調べた研究がある[7]．n 種のすべての種がそれぞれ正の量いる状態からスタートするが，最終的にはほとんどの種が滅んでしまい，ごく少数の，10 種もしくはそれ以下の数の種しか残ることができない．さらに，可能な種の数 n を 100 から 1000，10000 というふうに増やしていっても，最終的に系に残る種の数は増えないと言う．

もう一つ興味深いことがある．それは，そのときに同じ種のセットで，同じ相互作用の係数を用いたとしても，試行ごとにまったく異なる種のセットができることが多い．モデルは (2) にある決定論的なものであるので，初期の個体数の組合せによって，最終的に誰が残るか，もしくはどのような個体数で落ち着くかが変わってしまうことになる．

このような理論による予測を，繊毛虫などの微生物を用いてフラスコで生態系を作って検証する実験がある．同じリストの種を入れるにしても，どのような順番で系に加えるかによって最終状態も異なるし，種数と生産性との関係も違ってくることが示されている[8]．

これは何を意味するのだろうか？ 同じ環境で同じ種のリストがあったとしても，それらから作り出される生態系がどうなるかについては，決まらないということである．遺伝資源の保全のために，野外の動物や植物の卵や種子を保存するプロジェクトが進められている．しかしそれによってすべての生物種が生き長らえたとしても，それらが以前のようなうまく共存する生態系を作れるとは限らないのだ．

4. 人間が住める偶然

この世界は，人間がうまく住めるようにデザインされているとする考えは繰り返し提出されてきた．聖書にあるように，神が自分の形に似せて人間をつくり，その住むべき場所としてこの大地と海を，そしてそこに生育する動物や植物を作ったとする話は，あちこちの民族の神話でも見られる．もっと最近のガイヤ説でも，この地球が人間が住める環境を安定に提供するようになっているとされている．このような考えは私たちを安心させてはくれるが，残念ながら何の根拠もない．生態系には撹乱を受けたあと回復しようとする安定性，ホメオスタシスがあるが，それは人間の住めるような状態へ戻るものとは限らない[9]．

人間は数多くいる生物種の中の一つである．その生存には食料も，住居も，水も，繊維も必要で，どの供給が止まっても人類は存続できない．他のすべての動物や植物と同じく，生存基盤を失うと滅びる．過去には，ある民族がその生存基盤を失って飢餓を含む悲惨な結果を経験することが，世界中のあちこちで何度も行われたことがわかってきた．最近ジェラッド・ダイアモンドが “Collapse: how societies choose to fail or succeed” という過去に生じた文明の崩壊についての本を執筆した[10]．考古学的な証拠によると，イースター島はかつては森に覆われ，今よりはるかに多くの人口を養えていた．人々が樹木を切って燃料や住居などに用いた後，樹木を絶滅させてしまい建材不足から漁船も作れなくなる．土壌の喪失も加わって食料不足が起き，ついには人口が激減したと言う．それはイースター島の土壌が貧弱で気候が冷涼なためにその生態系がとくに脆弱であったことにも起因した．しかし同様な不幸は，グリーンランドのバイキング，中南米のマヤ，など，至る所に例がある．過去の文明は自らの生存基盤を断ち切って滅ぶことを繰り返してきたようだ．現代の環境問題も基本的にはそれと近い．

“Collapse” においては，多数の失敗例に対して社会が持続可能な生活をするように選択して成功した例が少数紹介されているが，その一つが徳川時代の日本だと言う．私は子供の頃江戸時代は息が詰まりそうな暗い封建社会というふうに教えられた．しかし，限られた資源を大事に管理し，環境への負荷を減らし，贅沢を慎んで将来を考えて自ら律する社会だったのだと言われると，なるほどそうだったのかという気がしてくる．

これまで地球上の生態系は人間の生活基盤を支えてくれてきたし，人間はそこで進化してきた．人口増加や１人当たりの資源消費量の増大により現在の人類は地球生態系に非常に大きなインパクトを加えていることはよく知られている．野生生物は滅び続けて，森林の面積も減少し，あらゆる生態系での改変は急速に生

じている．人間が開発をしすぎたとしても，後で反省して環境負荷を減らせば，元の生態系に戻れるとどこかで思っているような気がしてならない．しかしこれまでの考古学と環境歴史学，そして生態学の知識によれば，それには何の保証もない．

地球生態系に人間が心地よく住めるというのは，たまたま偶然そうなっているだけではないか．そう考えて対処しないと取り返しがつかない可能性がある．

参考文献

1) 巌佐・菊沢・松本編，2003,『生態学事典』,（日本生態学会）共立出版.
2) 楠田・巌佐，2002,『生態系とシミュレーション』，朝倉書店.
3) Michor, F., Y. Iwasa, and M.A. Nowak, 2004, Dynamics of cancer progression, *Nature Reviews Cancer* **4**:197–205.
4) 鷲谷・矢原，1996,『保全生態学入門：生物多様性を守るために』，文一総合出版.
5) Hakoyama, H. and Y Iwasa, 2000, "Extinction risk of a density-dependent population estimated from a time series of population size", *Journal of Theoretical Biology* **204**:337–359.
6) MacArthur, R.H. and E.O. Wilson. 1967, "Theory of island biogeography", Princeton University Press.
7) Tokita, K., and A. Yasutomi, 2003, "Emergence of a complex and stable network in a model ecosystem with extinction and mutation", *Theoretical Population Biology* **63**:131–146.
8) Fukami, T. and P.J., Morin, 2003, "Productivity-biodiversity relationships depends on the history of community assembly", *Nature* **424**:423–426.
9) レヴィン，S.A.，重定・高須訳，2003,『持続不可能性：環境保全のための複雑系理論入門』，文一総合出版.
10) Diamond, J. 2005, "Collapse: how societies choose to fail or succeed", Viking Penguin.

（いわさ・よう，九州大学大学院理学研究院）

気象は偶然か

地球物理における偶然と必然



木 村　龍 治

1. はじめに

2004年12月に発生したスマトラ沖地震津波で20万名を越える人命が失われた．もしも津波の来襲が事前に予測されていれば，これほどの犠牲者は出なかったであろう．これだけ科学技術の発達した現代でも，私たちの生活を脅かす自然災害の予測は極めて不十分と言わざるを得ない．

自然現象の予測は，偶然と必然の問題と深く関係している．自然現象が偶然に生じるものなら，過去の統計に基づいた確率や期待値が予測の根拠になる．しかし，自然現象が必然で，決定論的に予測できるのであれば，過去のデータを沢山集めることよりも，現在の状態を正確に把握することが重要である．

未開社会では，天災は「神の怒り」と考えられたから，その予測は人知を越えた問題であった．そのような時代には，神託を行う神官や特殊な能力をもった予言者が社会的に大きな役割を負っていた．普通の人には感じられないようなかすかな前兆現象を感じて，地震や火山噴火を予測したのかも知れない．現在でも，民間では，様々な地震の前兆現象で地震の発生を予言することが行われている．しかし，当たるときもあり，外れるときもあり，それが偶然か必然か判然としないものがほとんどである．

一方，物理学は因果律を基本とする．あらゆる自然現象は，それをもたらす必然的な理由があると考える．分子運動さえ，不確定性原理による多少の曖昧さはあるが，決定論的に決まると考えてよいだろう．マクロな世界を支配する物理法則は，多くの場合，現在の状態が，状態の変化傾向をユニークに決定する．すなわち，一般に，空間 $\boldsymbol{r}$ と時間 t における物理量 $P(t,\boldsymbol{r})$ に対して，物理法則は

$$\frac{dP}{dt}=f(t,\boldsymbol{r}) \tag{1}$$

のような形式を取ることが多い．$f(t,\boldsymbol{r})$ は，現在の状態が変化傾向を指定することを示している．右辺には過去の情報が直接に入っていないから，正確な現状把握ができれば，わずか先の未来の状態が決定されることを意味している．わずか先の未来を現在と思えば，同じ手続きで，そこからわずか先の未来を予言できる．このステップを先へ先へと繰り返していけば，はるか先の未来も予言できる．その能力を示すよい例は天文現象の予測であろう．天体の軌道計算を行うことにより，10年先の皆既日食を正確に予測することができる．

「現在に痕跡を残さない過去は，未来に影響を与えることはない．未来の情報は，すべて現在に含まれている」という物理的発想には，偶然が入る余地がない．一見，偶然のように見えることがあったとしても，それは，現在の状態を十分に把握していなかったためである．現在を正確に把握していれば，未来は厳密に予測できる．「偶然は無知の程度を測る尺度」とは，ポアンカレの言葉である[1]．

天文現象の予測は，物理法則による予測のパワー

を示しているが，同じ方法を地球環境に適用すると，予測能力が格段に落ちてしまう．社会的ニーズという点では，自然災害の予測のほうが天文現象の予測よりも大きいだろう．集中豪雨や地震を正確に予測して物理学のパワーを示してほしいところだが，物理学がその期待に答えているようには思えない．それはなぜであろうか．本稿では，このような自然現象における必然と偶然の関係を考察してみたい．

2. 寺田寅彦の教訓

「天災は忘れた頃に来る」という言葉で知られる寺田寅彦は，原子物理学の研究が華々しく進展した20世紀前半に活躍した物理学者である．ラウエ斑点の写真を様々な角度から撮影することによって結晶構造を調べる方法を提案し，その結果が西洋に知られていれば，ブラッグ父子の代わりにノーベル賞を受賞したのではないか，と言われる人であるが，彼は，ミクロな物理学だけでなく，地球物理的なマクロな現象の物理にも興味をもった．また，多くの随筆を書いたことでも知られる．

彼が活躍した1920年代から30年代にかけて，大きな自然災害が次々に日本列島を襲った．冒頭の言葉は，「天災と国防」[2]という随筆が出典であるが，この随筆は，1934年に発生した室戸台風の被害を念頭において書かれたものである．その前年の1933年には，三陸海岸に大津波が襲い，約3000名の犠牲者が出た．被害は全世界に報道され，この津波をきっかけにtsunamiが国際語になった．その10年前の1923年には，関東大震災が生じ，約10万名の犠牲者が出た．寺田寅彦は，この地震を自ら体験し，その直後に震災の被害調査を行っている．このような大きな被害をもたらす自然災害を目の当たりにして，彼は，自然現象の予測に深い関心をもったことは想像に難くない．「物理学を根拠にして，果たして，自然現象は予測できるか」という問題である．

彼は，未完の著作『物理学序説』[3]を執筆しているが，その付録に，「自然現象の予報」という解説がある．90年前に書かれたものであるが，彼は，この中で，決定論的予測の是非を検討している．例えば，温度の予測を考えると，マクロな物理量の予測が問題になるが，ミクロな世界から見れば，分子運動の統計的な予測を行っていることになる．そこには，偶然的な要素が存在するわけである．そこで，予測結果がユニークに決まるという場合でも，厳密にユニークな場合と統計的性質がユニークな場合とを区別しなければいけないと言う．

次に，支配方程式の妥当性について検討する．物理法則を用いた予測では，(1) 式の左辺で示されたような時間変化傾向が予測結果を決めることになるが，例えば，気温の予測を行う場合，気温のゆらぎは速い変化から遅い変化まで，様々な変動のスケールを持っている．1カ月先の気温を予測する場合，1秒周期の気温変動など興味がないわけであるが，支配方程式は時間に関して連続関数であるから，冒頭に述べた指導原理に従って予測をする場合に，連続関数の積分作業が必要になる．もしも，1カ月先の気温には周期10秒以下の変動は関係しないという保障があれば，分子運動を平均して温度の概念を導入したのと同じように，周期10秒以下の気温変動を平均した状態だけを対象にすることができる．しかし，このようなことは，あらかじめ保障されるのであろうか．

現在の言葉を使えば，この問題提起は，カオスやフラクタルと関係している．すなわち，気温の変動を示すグラフは，山の稜線の高低と同じように，フラクタル的な性格をもっている．短い周期の変動に着目すれば，極めて短時間の変動もあり，一方では，非常に長い変動の周期もある．ある程度，長い周期の変動の予測を行う場合に，短い時間の変動は無視してよいのだろうか．一般には，短周期の時間変化傾向のほうが長周期の時間変化傾向より大きく，絶えず符号を変えるはずである．その結果，(1) 式を厳密に積分しようとすると，短周期の大きな振動を問題にせざるを得ない．

同じことは，空間的な分解能についても言える．大気は，分子の運動から地球規模の循環まで，極めて広い範囲の不均一な空間構造の集積である．そ

のようなシステムをどの程度に粗視化できるのであろうか．換言すれば，ほとんど無限個の自由度をもつシステムの時間発展をどの程度の小数自由度のモデルで表現できるか，という問題である．

天気予報の場合は，予測結果の検証が可能なので，どの程度の変動の時間・空間スケールまで考慮すれば大気の状態が予測できるか，経験的な知識がある．その変動は，数値予報の中で考慮される気象擾乱の空間スケールと関係しており，計算機の進歩と共に，時間・空間の分解能は次第に短くなる傾向がある（現在の数値予報モデルでは，日本域のみ空間分解能 10 km，時間ステップ 40 秒で，9 日間時間積分を行っている）．

しかし，気候の予測になると，経験的な知識がない．100 年後の平均的な気候を予測するためには，1 年平均した変数の時間積分で十分なのであろうか．それとも，季節変化まで考慮すべきか，日変化も重要なのか，現在でも，はっきりした物理的根拠が得られていない．その結果，何から何まで考慮して，技術の許す限り細かい予測をするほど精度が上がるのではないかという素朴な考えが支配的になる．地球シミュレータのような巨大なコンピュータで気候の予測をする発想は，そこから生まれる．しかし，地球シミュレータと言えども，時間・空間分解能に限りがあるわけで，現在の気候モデルが究極の気候モデルというわけではない．

3. 偶然の出現

自然現象の予測を難しくする要素に相変化がある．温度が 0℃ になると水が凍結するのであれば，相変化の予測もできるはずだが，実際は，過冷却現象が生じる．過冷却の水がいつ凍結するか，決定論的に予測することは非常に難しい．同じことは，応力を与えられた岩石がいつ破壊するか，というような問題にも共通する．寺田寅彦は「自然現象の予報」の中で，地震を，一様な糸に張力を与えて，いつ切れるかという問題と比較している．同じような実験を繰り返して行い，切断までの時間の統計的な性質を問題にすることはできるであろう．しかし，もしも，張力の増加が極めて長時間をかけてゆっくり行われる場合は，それに対応して不確定の時間の範囲は長くなる．その結果，今すぐ糸が切れるかも知れないし，100 年後に切れるかも知れないという事態が生じる．これが地震の予測であれば，このような予測は，実用の役に立たない．それ故，地震の予測よりも，常に，地震に対する防災を心懸けたほうがよい，というのが，寺田寅彦の結論である．おそらく，この結論が，「天災は忘れたころに来る」という戒めの言葉を生んだのであろう．

彼は，さらに地震予測の検討の中で，糸の場合は「切れるか切れないか」という 2 つの場合しかないが，地震の場合は，様々な強度の地震が起こるので，糸の場合よりもさらに難しい，と述べている．基本場が不安定平衡の状態にある場合，わずかなきっかけが大きな現象の変化を引き起こす．その場合に，わずかなきっかけは個々のイベントに対して独立とは限らない．小さなイベントが引き金になって，大きなイベントが発生することも考えられる．

寺田寅彦が予想した地震発生のモデルは，Bak et al (1987)[4] によって「自己組織化臨界系（SOC: Self-Organized Criticality)」という概念が与えられた．彼らは，SOC を示す簡単なモデルとして，砂山崩しに着目した．箱に乾いた砂を入れ，表面が水平面になるように均しておく．そして，箱を次第に傾けていく．ある程度の斜面までは砂は静止しているが，斜面の角度がきつくなると，表面の一部が崩れ始める．しかし，突然，全体が崩れるということはなく，一部が山崩れのような現象を起こすのである．それは，表面を平らにしたといっても，細かく見れば凸凹しており，ある部分の斜面が他より急になるからである．崩れた部分の周囲の凸凹が安定であれば，崩れる範囲は局所に限られる．しかし，周囲の凸凹が不安定であれば，近くの崩落がきっかけになって，連鎖反応的に崩落が拡大することがある．一方で，崩落が起これば，その付近は安定化してしまうので，次の崩落は起こりにくくなる．その結果，砂の表面は，

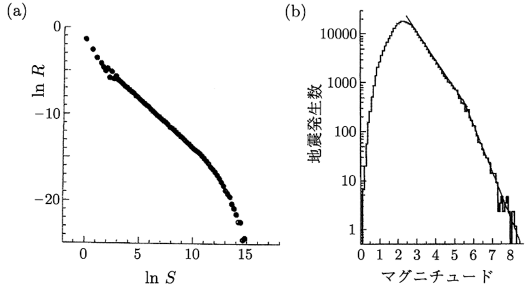


図 1 自己組織化臨界系の例. (a) 砂山崩しの崩壊面積 S と発生頻度 R との関係[4], (b) 地震のマグニチュード（解放エネルギーの対数）と発生頻度との関係[5].

箱の底面の傾きよりも小さな角度の平面を保つことになる. その角度は, 外部から与えられたというものではなく, 砂の性質が決めるので,「自己組織化」というのである.

図 1 (a) は, 砂山崩しに似せたコンピュータ・シミュレーションの結果であるが, 個々の崩壊が起こる面積 S を横軸に取り, その頻度を縦軸に取ると, 頻度 R と崩壊面積 S の間には,

$$R = aS^b \tag{2}$$

で表される関係があることが分かる. ここで, a, b は定数である. 一方, 図 1 (b) は, 過去 50 年間に日本列島で発生した地震 30 万件について, マグニチュードと発生頻度との関係を示したものである. 地震の際に解放されたエネルギー（マグニチュードはその対数に比例する）と発生頻度の間にベキ法則が成り立つことを示している（マグニチュードが小さい部分で頻度が落ちているのは, 地震計の感度に限界があるためと考えられる）. 小さな地震は沢山発生するが, 大きい地震は稀にしか起こらないということである. 寺田寅彦は, 砂山崩しではなく, 椿の花の落下の時間間隔の分布と地震の際の余震の時間間隔の分布の間に似た関係があることを指摘しているが, もう一歩この問題を追求すれば, SOC の発想に辿り着いたに違いない[7]. なお, SOC に関しては, 中西氏の解説[6]や Jensen 氏の教科書[8]を参照していただきたい.

ベキ法則が成立する背景には, 自然現象のフラクタル的性質が挙げられる. すなわち, 多くの自然現象では, 現象自身に空間スケールを決めるメカニズムがなく, その結果, 小さい構造から大きい構造まで, 自己相似的な性質を示す傾向が見られる. 先ほど, 山の稜線を例に出したが, 地形の鉛直断面を考えると, 地面に転がる小石の凸凹から山塊全域に及ぶ地形まで, 実に大小様々な地形が組み合わされており, 私たちがイメージする山の稜線の形は, それを, 自分の都合に合わせて粗視化したものである, ということなのである.

現象によっては, 粗視化したモデルを対象にして予測が可能なこともあるが, 不安定平衡が問題になる現象では, 無視してしまった小さなスケールの現象がスケールの大きな現象を発現させることが考えられる. そのような現象を粗視化した目で見れば, あたかも因果律を無視したように, 何もないところから突然, 激しい現象が現れるように見える.

このような自然現象の発現は地震に限られるわけではない. 大気の中にも, 多くの不安定平衡が存在する. その典型的な例は雷雲（積乱雲）の発生である. 雷雲は, 水蒸気の凝結に伴う熱の発生が大気を加熱して生じる対流の一種であるが, 上昇気流が地面付近の水蒸気を上空に運んで凝結が

起こるために，上昇気流が起こらないと，たとえ下層大気が湿っていても雷雲が発生しない．一方，何かの理由で，凝結高度まで空気が上昇すると，そこで熱が発生して上昇気流が強化され，ますます下層から凝結高度に水蒸気が供給され，巨大な雷雲に成長する（気象学では，このようなメカニズムを表すのに「ポテンシャル不安定」という言葉を使う）．雷雲が一度発生すれば，その後の発達は決定論的にシミュレーションできるが，ポテンシャル不安定の場の中のどこで雷雲が顕在化するかは，砂山崩しを予測する問題と似ているように思える．事実，現在の数値予報の技術をもってしても，降雨域を正しく再現することができないので，「降水確率予報」が導入されているのである．

4. 天気予報

図 2 は，天気予報の予報精度と，予報先までの時間の関係を調べた結果である．参考のために，気象庁とヨーロッパ中期予報センターの結果を比較してあるが，どちらもグローバルな大気循環のシミュレーションに基づいて天気予報を行っているので，比較が可能なのである．実用になるのは予報精度が 0.8 以上の場合で，それ以下になると，はずれの感覚になる．

どのような予報モデルを使っても，時間積分を先に進めるに従って，実際の大気循環から次第次第に離れていく．1960 年代，MIT の気象学者ロレンツは，流体力学の方程式の非線形性にその原因があるのではないかと考え，3 個の変数から成る非線形の時間発展方程式の時間変化の性質を研究

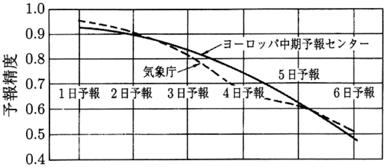


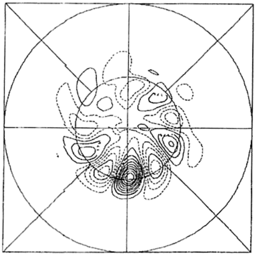
図 2　天気予報精度と予報先までの時間との関係（孫沈清氏による）．

して決定論的カオスを発見した．その結果は，非線形力学の問題として数理科学の研究者に注目され，その後，カオスの研究が盛んに行われたのは周知の事実である．

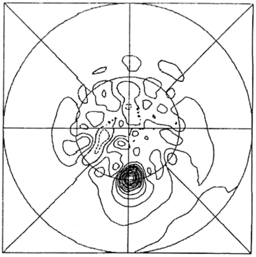
日本の天気の変化は，日本列島の上空を吹く偏西風の変動と深く関係している．そこで，偏西風をいかに精度よく予測するか，ということが重要である．偏西風の変化といった場合に，2 種類の変化が重なっている．第 1 は，パターンが変形すること，第 2 は，パターンが極を中心にして東向きに回転していることである．後者は，パターンの位相が西から東に伝播している，と言ってもよい．たとえ，パターンが同じ形であっても，そのパターンが回転することによって，特定の場所の気圧は時間的に変化する．この場合は，位相速度さえ分かれば，気圧変化がかなり先まで予測できる．

図 3 は，緯度 45 度上の一点と他の場所との気圧変化の同時相関係数を調べた結果である．もしも，パターンの形が変わらないで，位相が回転しているだけであれば，着目点の遠くまで相関係数がよいはずである．一方，パターンの変化が絶えず地域的に起こっているならば，相関係数の分布は着目点から離れると急に小さくなるはずである．この結果によると，気圧分布の相関の程度は季節によって変化する．図 3(a) は冬の結果，(b) は夏の結果であるが，冬は，中緯度帯の気圧分布がグローバルに関連しているが，夏は，構造が局在化していることを示している．その理由は北半球は南半球に比べて大陸の面積が大きく，大陸表面における夏場の加熱が大気循環を不規則に変化させているためと考えられる．

このような気象の空間スケールの季節変化は，予報精度と関係している．図 4 は，気象庁が行っている予報精度の検証結果である．24 時間予報の 500 hPa 面の等圧面高度と実際の等圧面高度を比較して，その相関係数を求め，そこから予報精度を定義している．1 に近いほど精度はよい．この結果を見ると，予報精度に顕著な季節変化が見られる．単にパターンが流されていく場合には予報精度がよいが，大気内部で大気循環の構造の変化が



(a) 1989 年 1 月



(b) 1989 年 7 月

図 3 500 hPa 面の等圧面高度の同時相関係数の分布．北緯 45 度上の一点（線の込んでいる部分の緯度線と経度線の交点）に対する他の場所の相関係数の分布を示した．丁亨斌（チョン・ヒョン・ビン）氏による．

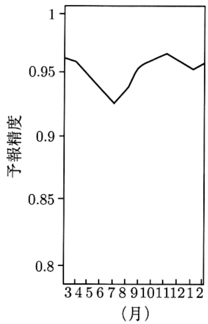


図 4 24 時間予報の予報精度の季節変化（気象庁による）．

生じると，予報精度が悪くなることを示している．

5. カオス的な拡散

決定論的カオスは，様々な物理現象で知られているが，大気循環のような流体現象では，2 種類のカオスを区別することが必要である．一つは，ローレンツモデルのように流れのパターン自身がカオス的変動を示すものであり，もう一つは，規則的に時間変化する流れに乗った粒子の軌跡をたどると，カオス的挙動をするものである．後者は，ラグランジュ乱流（Lagrangian turbulence）[9]とかカオス的混合（chaotic mixing）[10]と呼ばれる．大気現象は，境界条件だけで流れの構造が決まるわけでなく，その中に含まれている水蒸気の輸送，熱の輸送など，流体に乗って移動する物理量が大域的な流れの構造を決めるのに重要な役割を担っている．そのような場合，偶然を生む原因が一見規則的な流れにも潜んでいる可能性がある．

大雑把に言えば，大気中における熱や物質の拡散の中に偶然が存在するということなのであるが，そのメカニズムはかなり複雑である．すなわち，グローバルな大気循環も，拡散の担い手である．スケールを少し細かく見ると，大気は常に引き延ばし折り畳み方式の拡散が見られる．

図 5 は，対流圏上部の水平面内（正確に言えば，等ポテンシャル温度面内）の 2 次元的な拡散を再現するコンピュータ・シミュレーションである．偏西風の中にある北緯 50 度の 1 点に 1 万個の点を置いて，その後の拡散の様子を見たものであるが，50 日たっても一様にならず，線状に点が並ぶ様子がわかる．カオス的な拡散が卓越していることを示している．

恐らく，引き延ばされた点の群は 3 次元的な乱流で上下に拡散していく．さらにスケールダウンすれば，分子の熱運動による拡散も関与してくる．熱力学では，分子運動とマクロな熱力学的概念の中間の構造をもたない．ところが，大気の拡散の

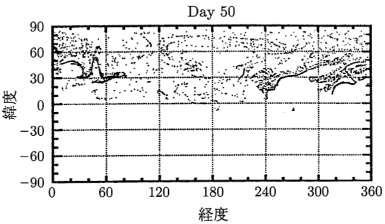


図 5　大気中のカオス的な拡散．対流圏上部の風によって，北緯 50 度からある日に放出された 1 万個の点の 50 日後の分布を示すコンピュータ・シミュレーションの結果．墨流しのパターンのように線状の構造が見られる[11]．

メカニズムを見ると，スケールごとに異なる性質の物理現象が関与しており，それらが組み合わされて，大気環境を構成しているように見える．

6. 創発現象

質量，運動量，エネルギーなどの保存則は極めて一般的な性格があり，いかなる複雑な自然環境においても成立する．しかし，逆に，これらの少数の保存則のみで，複雑な自然が構成できるのであろうか．現在の天気予報や気候の予測は，まさにそれを実行しているように見える．複雑性の特徴は，すべて境界条件と初期条件の複雑さに転化されており，時間発展は，極めて単純な法則に従うという発想である．

蔵本由紀氏は，『新しい自然学』[12]の中で，複雑系を読み解くキーワードの一つに「創発」があるのではないかと述べている．「創発 (emergence)」とは，もともと生物の進化の過程で，突然，新しい生物が創造される現象を指す生物進化学の用語であるが，マイケル・ポランニーが，その著書『暗黙知の次元』[13]の中で一般的な概念を与えた術語である．

ポランニーは，複雑性は階層構造をもつと言う．もっとも下層には，極めて一般的な法則が存在し，境界条件や初期条件を決めることによって，次のステップの階層構造が決められる．その構造がさらに組み合わされて，次の階層構造に進む．単語が集まって文章になり，文章が集まって小説になる，というようなことを考えるのである．その場合，単語の集積から，意味のある文章はできない．文章の構成には，単語のレベルより上の原理が必要で，その原理が多くの単語の中から特定の単語を選んで，意味のある文章を構成する．どの単語が選ばれるかは，文章レベルの原理が決めることで，単語レベルの構造には，自分自身で文章を構成する原理を含まない．ゲームのルールがゲーム展開を指定しないのと同じである．ゲーム展開はゲームのルールより上のレベルの構造なのである．上のレベルの構造は，当然，下のレベルの法則に従うわけであるが，上のレベルのメカニズムが下のレベルの法則に合う境界条件や初期条件を選び出す．だからと言って，上位のレベルの構造が下位のレベルの法則まで影響を与えることはない．その過程を「境界制御の原理 (the principle of marginal control)」と言う．彼は，「存在するべき事柄（上位レベルの構造）は，存在している事柄（下位レベルの構造）によって決定されない」と言う．その場合，単純な世界からどのようにして複雑な世界が発現するのだろうか．彼は，そこに「創発」という概念を持ち込む．何か，明示的でない原理が「創発」されることによって，上のレベルの構造ができるとしか考えようがない，という訳である．

創発現象の具体例として蟻塚を考えることができる[14]．シロアリは，自分の身長よりはるかに大きな蟻塚を作るが，個々のシロアリは本能に従って極めて部分的な巣作りの作業を行っているだけで，そこには，設計図もなければ，現場監督もいない．その場合，蟻塚全体の構造は，一匹のシロアリの営みの中に内包されているのだろうか．

地球環境の構造も，シロアリの巣作りと似た点がある．局所的，地域的な無数の散逸構造の集積として，グローバルな大域構造が形成されているように見える．そこには，宇宙船の設計図のような設計図があるわけではない．地球環境が，極めて高次のレベルの複雑系であることを考えると，下位レベルの保存則の時間積分だけで，遠い将来

まで予測できるようには思えないのだが.

7. おわりに

「天気予報と偶然」というテーマから，ローレンツモデルを連想される読者も多いと思う．しかし，ローレンツモデルという切り口だけで気象の変化のメカニズムを割り切るのは，単純過ぎる．一方で，（蔵本氏が主張するように）複雑なものを複雑のまま眺めていても，その本質に近づくことはできない．複雑な現象から普遍的な性質を抽出したときに理解した気分になるのである．その普遍的な性質とは，様々な複雑系に共通する性質をもつ現象である．カオスはその一つであるが，それ以外にも複雑系を特徴づける概念はいくつもある．ここでは，相変化（相転移），自己組織化臨界系，フラクタル，ラグランジュ的な混合，創発現象など，気にかかる概念がいかに自然現象の「偶然と必然」に関わっているかを考察してみた．いずれの現象も奥が深く，筆者の理解は極めて浅いものであるが，興味をもった読者が，さらに新しい概念を「創発」して，複雑系における必然と偶然の理解を深めていただくことを切に期待している．

本稿をまとめるに当たって，東京大学海洋研究所の野口尚史氏から稀覯本である寺田寅彦の『物理学序説』を貸していただき，また示唆に富む意見をいろいろいただいた．記して感謝の意を表します．

参考文献

1) ポアンカレ著，吉田洋一訳『科学と方法』岩波文庫（青）902-2.
2) 小宮豊隆編『寺田寅彦随筆集』第5巻，1948.
3) 寺田寅彦『物理学序説』岩波書店，1947.
4) P. Bak, C. Tang and K. Wiesenfeld: *Phys. Rev. Lett.* **59** (1987) 381 および *Physcal Rev. A* **38** (1988) 364.
5) 中西　秀「自己組織臨界現象と地震のダイナミックス」日本物理学会誌 **49** (1994) 267.
6) 上出洋介，科学 2002年8月号.
7) 科学，特集「寺田寅彦と現代」1996年10月号.
8) H.J. Jensen: Self-Organized Criticality, Cambridge University Press, 1998.
9) J. Chaiken at al.: Lagrangian turbulence and spatial complexity in a Stokes flow. *Phys. Fluids*, **30** (1987) 687.
10) J.M. Ottino: The kinematics of mixing: stretching, chaos, and transport, Cambridge University Press, 1989, pp.364.
11) Pierrehumbert and Yang: Global chaotic mixing on isentropic surfaces, *Journal of Atmospheric Sciences*, **50** (1993) 2462.
12) 蔵本由紀『新しい自然学』岩波書店，2004.
13) マイケル・ポランニー著，高橋勇夫訳『暗黙知の次元』ちくま学芸文庫，2003.
14) スティーブン・ジョンソン著，山形浩生訳『創発』ソフトバンク・パブリッシング，2004.

（きむら・りゅうじ，放送大学，東京大学名誉教授）

名著に親しむ
——特集から広がる読書案内——

鈴木 増雄

ゆらぎ（偶然の出会い）を楽しむ

1970年の秋から一年間ニューヨーク州イサカ市にあるコーネル大学に滞在していたとき，そこの数学教室の教授だった伊藤 清先生とたまたま知り合い，家族ぐるみのお付き合いをさせて頂いた．先生は，確率微分方程式，いわゆる伊藤カリキュラスで当時すでに世界的に有名な数学者であったが，尊大ぶったところもなく大変人情味豊かで，一緒に碁を打ったり，先生の家の地下室で卓球に興じたりした．先生はまた筆者の物理の話を聞いて下さり，鋭い批判的コメントもされたが，感心して下さることが多く筆者はこうして楽しい米国生活を送ることができた．その後，東京大学物理教室の久保亮五先生のグループの助教授として研究・教育をするようになったとき，非平衡系の統計力学の議論で伊藤カリキュラスの話が出て来て，この際伊藤理論を本格的に勉強しようと先生の名著『確率論』を手に入れ熱中して読んだ．しかし，この本は当然のことながら数学的厳密さを保っているので物理分野の人が読むには難し過ぎたようで，物理に応用できるようになるには，しばらく時間がかかった．統計物理では，数学的に美しい伊藤カリキュラスではなく，それと等価（変換により互いに移れる式）ではあるが，より扱い易いストラトノヴィッチ型の確率微分方程式，いわゆるランジュバン方程式がよく用いられる．筆者も，不安定系を扱う非線形ランジュバン方程式を（自分で新しく導入したスケーリング極限をとるという）漸近評価法により，無秩序から秩序が生成されるメカニズムの解明に挑戦し，秩序生成の時間，すなわちオンセットタイムの表式を求め，秩序生成にはゆらぎと非線形性の相乗効果が重要であることを明らかにした．それに関する解説も含む，確率過程のわかり易い本がファン・カンペン先生により1992年出版された．（筆者は30代の初めの頃，オランダのユトレヒト大学の理論物理研究所に客員教授として半年間滞在し，そこの教授であった先生の影響を強く受けた.）物理や化学の分野では，この本は非常によく使われている．これは，伊藤の確率論の本とは全く相補的である．物理現象や化学反応などを理解するには，ゆらぎが多くの興味深い問題でいかに重要であるかがこの本を読むとよくわかる．また，この本によって，それらの現象を数理的に扱う処法を手っ取り早く学ぶことができる．

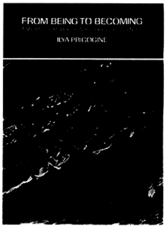
1980年代の初めに東京大学全体の総合科目として「偶然と必然」というテーマが取りあげられた．この講義では，物理学や生物学などの自然科学だけでなく，社会科学や人文科学のテーマも幅広く議論されており，その講義録は「偶然と必然」というテーマを概観するには手頃な本である．この本は再版を何回も重ね，長く読まれているようである．

物理学においては，古典物理学でも粒子の数が非常に多くそれらの振舞いが複雑になると，確率的な様相を呈するようになり，偶然性やゆらぎが大きな役割を果たすようになる．その結果，却って全体的としては（巨視的には）簡単な法則（必然性）が現れることになる．熱力学第二法則や不可逆性などはその典型的な例である．少数粒子系であっても，カオスの発生するような系では，小さな違いがやがて大きな結果（指数関数的に大きな相違）を産む．このような系を量子化したときに現れると期待される量子カオスは大変難しい研究テーマである．量子力学における不確定性と量子カオスとの間に概念的な関係があるのかないのか，あるとすればどのような関係にあるのかは極めて興味深い今後の研究テーマの一つであろう．このようなテーマに関して，プリゴジンが書いた『From Being to Becoming』という本は大変示唆に富んでいて熟読に値する名著であると思う．ヨーロッパに行く度に，筆者はブラッセルのソルベイ研究所に招待され，そこの所長であったプリゴジン先生から上記のような難解な理論を，筆者のジェットラグ（時差ボケ）も治らないうちに畳み掛けるように聞かされて，辟易したことが何回もある．そんな議論の後に，おいしい食事をごちそうしようと言われて，アスパラガスだけの昼食を頂いたことが懐かしく思い出される．

（すずぎ・ますお，東京理科大学理学部，東京大学名誉教授）

FROM BEING TO BECOMING

TIME AND COMPLEXITY IN THE PHYSICAL SCIENCES



I.PRIGOGINE 著，ペーパーバック，272 頁，W.H. FREEMAN AND COMPANY，1980 年

1977 年にノーベル化学賞を受賞したプリゴジンの多くの著作の中でも，この本は彼の思想を知るのに最適であろう．この本は偶然と必然を主題にしているのでなく，時間と複雑性を主なテーマにしている．この本で論じられている複雑性とゆらぎ，カオス，不可逆性，量子力学の不確定性などの問題は，必然的に偶然の問題と関連してくる．

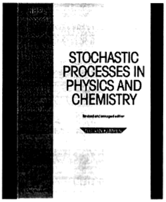
確率論



伊藤　清著，A5 判，414 頁，岩波書店，1953 年

第 1 章と第 2 章で確率論の基礎的概念が学べる．すなわち，分布，平均値，分数，相関などが導入されている．第 3 章では，独立変数の和に対する中心極限定理が解説されている．第 4 章と第 5 章では，典型的な確率過程，すなわち，正規加法過程，特にウィーナー過程が詳しく論じられている．第 6 章では，統計力学の数学的な基礎となるエルゴード定理，特に，バーコフの個別エルゴード定理などが定常過程に対して論じられていて興味深い．第 7 章ではマルコフ過程において伊藤の確率積分・確率微分とその拡散現象やブラウン運動への応用が述べられていて，この本のハイライトである．

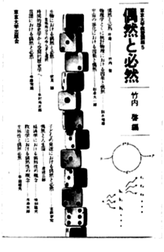
STOCHASTIC PROCESSES IN PHYSICS AND CHEMISTRY



N.G.VAN KAMPEN 著，ペーパーバック，ELSEVIER，1992 年

オランダには統計物理学の古い伝統がある．ファンデル・ワールス以来多くの優れた物理学者が輩出している．ノーベル物理学賞を 1999 年に受賞したト・フーフトの母方のおじであるファン・カンペン（著者）も著明な学者で，この本は，物理や化学の分野でゆらぎの係わる問題を扱う際には必読の書である．ランジュバン方程式やフォッカー・プランク方程式の取り扱い方から，不安定系での秩序生成の問題まで懇切丁寧に解説されている．最後の章では，量子ランジュバン方程式や量子マスター方程式が論じられている．

偶然と必然

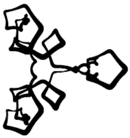


竹内　啓編，四六変形判，294 頁，本体 2400 円，東京大学出版会

この本は東京大学の総合科目の講義録であり，文字通り，物理，宇宙物理，生物物理，歴史，言語，教育，哲学，経済，政治などほとんどあらゆる分野にわたって偶然と必然の問題を論じている．全体を概観するには最適の本であろう．この本の各章は独立しているので好きな章から読んで楽しむことができる．

存在的真理†

偶然と必然をめぐって



柳瀬　睦男

方法論の信頼性　自然科学の方法論が一体何をわれわれに与えるか，つまり自然科学の方法論でどれだけ本当のことが分かるかという問題を考えます．それは結局，自然科学の理論をつくりあげていく上に使われたいろいろな方法論が，どれだけ信頼できるかということになります．自然科学がなぜ起こったかということの一つの理由，動機はものごと――自然現象――をなるべく人間の主観的な表現とか，主観的な印象から離れて，誰でもいつでも納得できるような仕方で記述しようということであったと思います．熱いとか冷たいとかいう主観的な表現が，温度という客観的な目盛り，客観的な尺度で言いあらわされるようになる．

そしてそういう記述によって，自然のからくりを知りたい，なぜ月が満ちたり欠けたりするのか，あるいはなぜ太陽は東から昇るのかというような，素朴な質問に答えたいのです．さらに，自然の現象というのは非常に複雑なように見えるけれども案外簡単なのではないか，簡単なからくりがあって，どこかで何かの法則が決まっていて，それに全部が従っている．そういう形で理解ができれば，その法則さえ知れば，後はそれを個々の場合に当てはめていけばよい．そこで自然科学はそういう動機によって自然現象を整理して，実際非常に多くの成果を収めてきたのです．

しかし同時に，非常に多くの新しい現象が起こってきて，今までのからくりからはみ出してしまう．これはおかしい，何か別のからくりがあるのだろうと，また別なからくりを見つけるわけですね．そして新しい法則は古い法則のより一般的な場合，つまり古い法則を含むような具合にできています．ですから，古典力学は量子力学と全く違うと言いましたけれども，ある極限の場合，つまり h というプランクの常数が他の物理量にくらべて非常に小さい，無視できるような場合には，量子力学は古典力学とだいたい一致する．そうした自然法則の確かさを調べることは，ただ，自然科学の基礎を理解するだけではなくて，ほかの種類の法則，特に社会科学の法則とは一体何か，社会科学の法則はどの程度当てになるかという問題を調べるうえに，非常に役に立ちます．

社会科学の場合　自然科学の基礎についての分析なり研究を十分にやらずに，ただ自然科学は非常に成功したから，これを社会科学に当てはめましょうというのは困るのです．よほど注意しないとたとえば，未来論ですべてが分かるような錯覚に陥るおそれがある．

未来論は社会科学を含んでいますから，自然科学と明らかに信頼性が違うわけです．不信頼性があると言った方がいいかもしれません．そういうことを，ここではっきりさせたいのです．未来論で言われているから，将来，30 年先はこうなるだろうと思っていると大変なことになります．社会科学の法則と自然科学の法則の信頼度の違いはど

† この論説は，『科学の哲学』（岩波新書，1984）の一部を，許可を得て転載・改変したものである．

こからくるのだろうか．あるいは，そもそも自然科学をお手本にして社会科学をつくるのが正しいのか，という問題を提出してみるのは意味があります．

自然科学はある問題意識を持って法則を見つけてきた．しかしそれでは実際に，自然科学を勉強，研究している人はいつでも，自然科学の法則そのものがどの程度確かなのかという反省をしているかと言うと，必ずしもしていない．そしてそれはむしろ当然だと思います．

自然科学を研究する立場は，自然そのものを対象として，あるいは理論の中にある物理量なり，法則なりを見出すことを使命としていますから，その理論そのものを外から考えてみる立場（メタ・サイエンス）とは違うわけです．そういう立場に立つのは，実際に第一線で自然科学を研究している人のやることではないですね．それを別の立場から，もっと基礎的な立場から考える人のやることです．

実証されること

では，自然科学を実際にやってきた人達はその法則性は確かであるかどうかについて何も考えなかったかというと，決してそうではない．自分がある法則を見つけたい，あるいは見つけたけれども，これは正しいだろうか，ということをいつも気にしています．その正しいかどうかということを調べる目安は何ですか．そう，実証されることです．つまり実験結果をその法則が説明するかどうか．そういう実証性があるために，自然科学は法則が正しいかどうかという目安を持ち，その目安に従って研究を進めていくのです．その正しさが分かったときに，今度はそれを使用して，その応用を図るわけです．

それでは自然科学の法則が見つけられたときに，この法則の確かさは何によって確かめられるかというと，今言ったように実験データとの一致から分かると，一応言えます．しかし，そういうことだけでは，自然科学の法則の基礎という問題を厳密に扱うという立場からは，まだ不十分です．つまり，実験データと一致すれば，法則は正しいのか，一体実験データと一致するとはどういうことかという問題が出てきます．

日常生活の「法則」

この問題を考えるために，ちょっと別なことを考えてみます．日常経験の場合をね．日常生活の中にもある法則があります．そしてこの法則の確かさはやはりある程度，経験との一致ということでその信頼度が分かります．

日常生活では，ある条件と，その条件によって引き出される結果があって，その間にいつも，ある規則があるという場合には，それを法則と言っていい．そしてその法則がどれくらい正しいかということは経験によってそれを調べればいい．自然科学の法則の場合も同じことではないのか．ある条件を置いて，そしてその条件から引き出される結果との間にある規則性がある場合に，それを法則と言うことができる．

真理とは

そうすると，自然科学の法則がもし実験データによって支えられているならば，ちょうどそれは日常生活の法則が経験との一致によって支えられているのと同じ構造で，真偽性が支えられているということになります．そこで次の問題は，真偽とは何か，正しいとは何かという問題になります．自然科学者が自然科学の法則を見つけて，データと一致するとかしないとか言っているのは，突き詰めていけば，真理をどこかに見つけたいからですね．誰が見ても，いつ言われても変わらないような言明がないだろうかという動機で，自然科学の法則を見つけようとしているのです．

結局，この問題は真理とは何かという問題をどう考えるかということになります．真理というのは何ですか？「普遍的に妥当性があるもの」．普遍的に妥当するものとは何ですか？「事象」？では，「2 たす 2 は 4 である」，これは真理ではないですか？これは普遍的に妥当するものですね．しかし「2 たす 2 は 4 である」とは事象ではなく，人間世界の中の契約ではないですか．だからこれは真理とは言えないのではないですか．「2 たす 2 は 4」が真理でないというと抵抗を感じるでしょう．もし，これは契約である，約束ごとであるということにすれば，これは真理であるということには

ならないですね．約束というのは約束するグループがあって，その間で決めたことですね．その約束を知らない人が，2 たす 2 が 5 であると言っても，文句が言えないわけです．ところが，真理というのは普遍的に妥当しなければいけない．そういう議論をすると，次のようなことが出てきます．

二重真理 真理という言葉の中にはどうも二種類あるらしい．一つは事象に関する問題．もし「太陽が東から昇る」ということの背後に在る法則が，いつでもどこでも成り立つことが分かれば，その事象は真理であると言わなければならない．しかし事象でない真理があるらしい．2 たす 2 が 4 というのは，明らかに事象ではないですね．太陽が東から昇ることと，2 たす 2 が 4 であることはどこか違います．しかし，この両方に真理という言葉が使えないとわれわれにとっては困るのです．

それではどのようにこの種類の真理を分けて考えたらよいか．今，本来的な意味での真理と，論理的な意味で言う真理とを，分けてみたい．

存在的真理 日常生活の場合には，ここに白墨が在ると認めても何も不都合が起こらない．しかし，自然科学の場合には，ここに白墨が在るということを真理と認めてしまうと，いろいろな不都合が起こってくるらしい．ここに物が在ることは，皆さん感覚で認めているのですね．しかし感覚というものは，調べてみるとよく錯覚があります．心理の本を読むと，集団的な幻想というのも，いくらでもある．だから今ここにいる人に，私が非常にうまい催眠術をかけることも不可能ではない（私はうまくないからみんなかからないけれども）．日常生活で真理と認めているものを，無条件に自然科学でも認めると，いろいろ不都合が起こる．しかしともかく，これは実際に真理であるかどうかは別として，今ここにという意味での存在的な真理を，問題にすることができます．

論理的な真理 もう一つ，論理的な意味で真理性を聞く聞き方があり得る．今ここに何かが在るということとは全然別に，論理的に正しいか正しくないかの規準で，一つの命題が真であるか，真でないかを問題にすることができます．さっき言ったように 2 たす 2 が 4 であるということを，論理的な意味で真理であると認める人は普通一般に多いだろうと思います．しかしちょっといろいろな公理論的な数学をかじった人は，いやこれは契約である，公理によって決めたことで何もこれが普遍的な論理的な真理ではない，と言うかもしれない．

ですから真理とは何かと言われたときに，われわれとしてはこの二種類を区別して考えざるを得ない．ではこれからの問題は，自然科学の法則が真であるとはどういう意味か，日常経験で言う法則が真であると言われているのとどう違うか，ということです．

現象との一致 現象という意味は，実際に実験室で，目に見えるもの，つまりメーターの針の読みとか，温度計の読みとか，そういうものをみんなが見て，なるほどこれは誰が見ても 23 度だと，そういうデータを現象とまず名付けますね．現象と，法則のいっていることとは一致するから，これは真理である．一応いいですね．

さてこの一致が真理をあらわすためには，これはいつでも一致しなければいけないし，どこででも一致しなければいけない，それから正確に一致しなければいけない．ある日には一致するけれども，次の日には一致しないということであれば，それは法則とは言えない．これは常識的に分かると思います．ですから真理であるためにはこういう条件も必要でしょう．ここで問題が起こります．こういうことは誰が保証するかということ．つまり，この現象とは何かと言うと，われわれの実験のデータです．そして実験のデータというのは，ある実験をする人が，今日あるいは明日，ここの場所であるいはほかの場所で実験して，その結果を出し，これを見て，なるほどこの通りだと言うのです．

帰納法の問題 しかし今度は，次の場所でほかのときに同じことが起こるか，いつでも現象の一致があるかと言うと，これは必ずしもそう言えないのです．この問題は帰納法の問題です．一

万回実験して一万回のデータを集めて，そしてそれがこの法則に，あるいはこの式に合えば，それでこの現象との一致は証明されたかと言うと，そうではないのですね．実際にそうでない場合はいくらもあります．

いつでもどこでもその法則が真であると言えるためには，何か別のものが必要だということが言えそうです．つまり，こういう存在的な真理が真理であるためには，その命題が論理的に矛盾がないだけでは真理とは言えない．何か別のものが必要である．有限回の現象の一致がなぜ無限回の現象との一致になるか，つまりその法則が不変である，いつでもどこでも成り立つということを，どうして保証できるかという問題ですね．それがこの存在的な真理の一つの根本的な問題，そして自然法則の真理性の根本的な問題です．その問題を解く考え方によっていろいろな立場が出てくるわけです．

素朴実在論の立場　実際の自然科学をやっている人達に，たとえばボイル・シャルルの法則は真理ですかと聞くと，みんな真理だと言うでしょうね．いつでもどこでも，ある条件の範囲内では，確かにボイル・シャルルの法則は普遍的な真理だと誰でも思っています．そして実際それを使っていろいろな実験をしている．有限回の実験しかやっていないのになぜ無限回に妥当する普遍性が出てくるかと聞くと，自然科学を実際にやっている人達の答えは，結局それは自然法則だからだ，自然法則というのは，いつでも成り立たなければ自然法則とは言えないと．では，なぜ，いつでも成り立つのですか．自然法則だからです．それ以上に進まないですね．

そういう実験的な方法が今確立していて，そして実験的な方法で確かめられた，ボイル・シャルルの法則は普遍的に成り立つ，という一つの信条があります．少なくとも自然科学者の立場としては，ボイル・シャルルの法則，もっと広くは自然科学の法則が不変であるということについて，全然疑っていません（もちろんある条件の下でですが）．その疑っていない立場のことを，つまり自然法則の真理性，あるいはいつでもどこでも成り立つ普遍性を信じる立場を，素朴実在論の立場と私は名付けます．

自然科学者は，その人がどういう哲学を持っていようとも，少なくとも実験室で実験をしているときの基本的な態度は，素朴実在論の立場である．自然法則の普遍性について全然それを反省することなしに，一つの信条として，それは正しいと認めているからです．この素朴実在論の立場というのは，日常生活における法則性を支えている基本的な態度でもあるのです．つまり，日常生活の中では，非常に多くの問題について，多くの命題を真理であると，存在的な意味で真理であると，認めています．ちょっと反省してみると，すぐに分かります．

実はもっと難しいのは歴史的な存在です．過去に起こったできごとが実際に起こったということを，どうやって証明するか．時間をひっくり返して，もとへ戻すわけにはいかない．それは歴史的真理の真理性の問題ですね．どれだけの意味で真理であるかということを，根拠づけるのが非常に難しい．普通の日常生活をするうえで，そんなことをいちいち気にしていたのではとてもやっていけませんから，日常生活に必要な限りにおいて，あらゆるものは全部それなりに存在している，という命題を存在的な意味での真理であると認めたうえで生活しています．

日常生活の立場として，素朴実在論という真理を認める態度があるのですが，実は自然科学の法則の普遍性，あるいは真理性を認める態度は，実際に自分が自然科学をやっている立場の場合には，この素朴実在論の立場をとるというのが私の考えです．実は帰納法の問題，それから自然法則の普遍性がどこによっているかという問題は，非常に議論されているし，人によっていろいろな意見があります．素朴実在論という立場で，これが一つの信条であると言ってしまえば，これはこれで筋が通ると私は思います．つまり，自然科学者は自然科学の法則が自然科学の方法論で確立されたならば，それはいつでも成り立つ，それは有限回の実

験で確かめられたにもかかわらず，無限回の場合に適用できる，という信念，信条を持っています．しかし，なぜこのような信念が正しいのかということを更に追い求めてゆくと，自然科学的な方法論の基礎には，われわれが正しいと認めざるを得ないようなある原理があることに気付くのです．

自然法則の「原理」

ここで，原理という言葉が出てきました．原理というのは英語でプリンシプル principle です．プリンシプルというのは語源的には「はじめの」という意味があり，「元」という意味もあります．ですから原理というのは，ものごとの理（ことわり）の始めである．あるいは理（ことわり）の元，つまり命題があって，この命題の根拠を聞かれたときに，この根拠を示すものが原理です．

その原理とは，具体的にどういうものかという例を考えてみましょう．原理にはどういうものがあるでしょうか．

まず矛盾律ですね．あらゆる哲学的な思索——つまりある命題が真理であるかどうかということを調べるとき，すなわちその真理の根拠をたずねるとき——の始めにおかなければならない命題，その命題の一つとして矛盾律というものをおきます．次に因果性の原理（これは「いんが」と読みます．漢字を使う場合の一番の欠陥は一つの漢字に対してたくさんの読み方をしなければならぬこと．実に不合理だと思いますね．いくら合理性をとうとぶと言っても，言葉には不合理性の要素がありますから，そう簡単にいかない）というものがある．それから，これについてはあとで話しますが，普遍性のもとになるような原理として斉一性の原理というものがあります．

矛盾の原理

矛盾の原理というのは，あるものが在ったときに，それが同時にあるものでないと言うことはできないということです．この矛盾の原理にもやはり存在的な意味と，論理的な意味とがあるということは，すぐに気が付くと思います．論理的な矛盾の原理というのは，論理的な意味で，ある命題が正しいと言ったとき，同じ命題が同時に正しくないということはあり得ない（実際にその命題に対応するものが世の中にあるかないかということは全然別にして）．A は A である．そして A はノン A ではない．まあ論理の言葉で書けばこういうことです．本当は無矛盾の原理と言った方がいいですね，矛盾があってはいけないという原理．

存在的な矛盾の原理というのはちょっと難しい．あるものはここに在るといったときに，同時に同じ条件でそのものがないということはない．だから今度は対象を考えているわけです．私がここに白墨が在りますと言っておいて，同時に白墨はここに在りませんと言った場合に，その二つの言明は矛盾するといいます．白墨が在ると言ったら在る，ないと言ったらない．それは存在的な意味での矛盾の原理ですね．

因果性の原理

因果性の原理というのは，ある結果があれば必ず原因があるだろうと，平たく言えばそういうことですね．つまりあるできごとがここに在るならば，そのできごとを引き起こした原因がどこかになくてはならない，そういう原理なのです．この原理も矛盾の原理と同じように，われわれがそれを最初に置かなければ，哲学的な思索というものは全然できなくなる，そういう種類の原理ですね．矛盾の原理についても，因果性の原理についても，いろいろな問題があります．そう簡単に言い切ることはちょっとできないのです．繰り返すと，因果性の原理というのは，ある命題が，あるいはある事象が——この場合には論理的よりも，むしろ存在的な真理に関する問題です——あるならば，それを引き起こす原因がどこかにあるだろうということです．

実はその逆は因果性の原理とは言わない．ある原因があれば必ずある結果があるだろうということは，因果性の原理ではない．ここを注意しておいて下さい．結果から原因に溯ることと，原因から結果を言うこととは別なことです．自然科学で因果法則と言うときには，ある原因，つまり初期条件を置けば，あとは全部決まるという言い方があります．それは哲学的な意味での因果性の原理とは言わないのです．

斉一性の原理　もう一つ，斉一性の原理というのがあります．それは自然法則の普遍性に根拠を与えるような原理です．つまり，自然法則は，もしそれが真理であるならば，自然のどこに持っていっても，いつでも真であるという原理．論理的な真理の場合には，それは初めから明らかです．論理的な真理というのは，外界との関連が全然ないのですから，場所がないわけです．どこでも真理だということは意味のないことです．しかし，存在的な真理の場合には，少なくとも意味があります．今ここで真であることが，いつでもどこでも真であると言えないと困るのです．これを原理の一つとして認めるか，認めないかによって，哲学的な立場が違ってきます．少なくとも日常，素朴実在論の立場をとるならば，この原理を入れないと筋が通らない，つじつまが合いません．

哲学の中には，真理という問題を正面から扱わない立場ももちろんあるわけです．ある現象の背後に何があるか分からないけれども，とにかく誰でも認めることのできるようなデータについての言明は，われわれは互いに比較することができる．しかし，それ以上の何かの言明については，われわれは何も真理性をいうことはできないという立場がある．真理とは現象の一致をいうのだと，そしてその背後には原理というものがあって，事物の存在と法則性を保証しているというような，実在論的な問題のたて方自体が，意味がないという考え方があります．前に出てきたボイル・シャルルの法則であるデータが P, V, R, T なら $PV = RT$ という式と一致するかどうかということを議論することはできますね．これが一致すれば，この法則は真であると言うことができます．しかし，このデータの引き起こした原因について議論することは意味がない．なぜならこの原因は決して現象の世界に出てこないから，というわけです．この立場では，現象面にあらわれてくる存在，それだけがわれわれの思索の対象になり得る．これは，非常に広く言えば経験論的な立場です．

以上見てきましたように，矛盾律とか因果律，斉一性の原理は，科学について哲学的な推論を論理

的，存在的に進めるためにはどうしても必要であるということが言えます．

斉一性の原理については，哲学の立場によっていろいろと議論があり，矛盾律とか因果律の原理とはちょっと違った種類のものです．斉一性の原理が議論されるようになったのは近世以降で，J・S・ミルが唱え出した原理です．それ以前は自明なものとして，あまり議論の対象とはなっていませんでした．経験論とか観念論の議論，帰納法則はなぜ正しいかという帰納法則の基礎を考えたときに，この問題が出てきたのです．しかし私の考えでは，斉一性の原理をここに加えますと，明解な議論ができると思います．先の二つだけでは，議論を固めようとしますと，最後にどうやってよいか分からなくなってしまいます．

これらの原理が分析的か総合的かという問題になりますと，いろいろ議論があります．たとえば矛盾律，因果律は総合的であるという人もいれば，そうではないという人もおります．斉一性の原理になりますと，少なくとも私は分析的であるとは思いません．総合的な判断であると言った方が，もっと原理の内容をあらわしているように思われます．

矛盾律は分析的な判断であるかもしれませんが，そう言い切るためには勇気がいります．なぜかと言いますと，分析的な判断というのは内容的にはトートロジィーなのです．しかし，それよりももう少し多くの内容を持っているだろうという人もおります．

考える葦

今までに述べてきたところを，もう一度ふり返ってみると，人間は，憐れな葦なのだけれども，しかし考える葦である．この考える葦が見つけ出した自然法則は自然を統一的に理解し，世界像をつくりあげてきました．またそれを使って，われわれはいろいろなものの役に立つように利用している．

ところでわれわれにとってもっと大切なのは，その基礎を探って自然科学の真理性を哲学的に確かめることです．まず，われわれが自分の自我を認めること．自意識の中で，あるいはわれわれの指向が外に向いているときだけではなくて，今度は内側へ戻ってきたときに，自分自身を認めること．そこから自分自身の体と外界——目に見えるものだけでなく，見えないものも含めて——を認めること．それは哲学的には実在論の立場です．そういう態度がやはり，一番われわれにとって健全な態度ではないのか．そして実際，そういう態度が自然科学をつくりあげてきたし，それから自然科学の応用としての技術をつくりあげてきていると思います．

ではこの辺で，哲学的な議論は終わりにしましょう．

（やなせ・むつお，上智大学名誉教授）



確率論へようこそ

G. ブロム・L. ホルスト・D. サンデル著，森　真訳，A5 判，306 頁，
本体 2700 円，シュプリンガー・フェアラーク東京

本書は，スウェーデンの 3 人の数理統計学者の G. ブロム，L. ホルスト，D. サンデルによる著書の訳本として 10 年前に出版された本の新装版である．新しくなった点は，題名が「確率問題ゼミ―コイン投げからランダム・ウォークまで」から「確率論へようこそ」へ変わった点，各章の題目の近くにある図版が「さいころと矢」から「猫」に変わった点，「訳者のまえがき」が「訳者のあとがき」となって移動した点，定価が「3,200 円（税込）」から「2,700 円＋税」に下がった 4 点で，本文の文章の一字一句何も変わっていない．

訳者の言葉「この本は，我々が日頃使いなれている日常的な意味での確率と学問としての一見とても役に立ちそうにも見えない高度に抽象化された確率論のちょうど中間にあって，ルベーグ積分とか確率空間なんてものは出てきません．実用的問題を統一的な視点で眺めてみよう，そしてとりあえず確率の楽しさを味わってもらおうというものです」は一つの書評と読める．

筆者は，「データからモデル―モデルから法則」「空即是色 色即是色」を研究を支える哲学として，時系列解析の分野で展開する実験数学の立場から，一つ提案し書評としたい．

本書には，16 世紀から 18 世紀の確率論の揺籃期の研究に関わったカルダノ，フェルマー，パスカル，ベルヌーイ一族，ホイヘンス，オイラー，スターリング，ラプラス，フィネッティ等の歴史的な研究の一端に触れながら，いくつかのさいころを投げたときの点の和，ホイヘンスの問題，夫婦円卓問題，クーポン集め，ブラックジャックの変形版，エーレンフェストのモデル等の高校での授業や大学受験で現れる問題，忘れんぼうの旅人，気前のよい王様，出会い，ぐずぐずした蜘蛛，海賊のゲーム等，小説の題名になるような話題が紹介されている．さらに，完全グラフとランダムウォーク，パターン，バースコントロール，災難つきのゲーム，回文等の話題を通じて，確率変数列の独立性，可換性，マルコフ性，マルチンゲール性等の大学での講義や確率論の研究に現れる話題が非常にたくさん紹介されている．特に，離散的な問題を連続時間の確率過程に埋め込んで解く方法を紹介する第 15 章は著者たちの研究の成果に依っていて，「本書を確率の教科書として書いたのではなく寝ころんで眺めるために書いた」と述べる著者たちの心意気を支える内容になっていると筆者には思える．

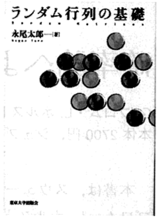
確率論が一見難しく見えるのは，日常の言葉で述べられている話題を数学の言葉（記号）を用いて定式化するプロセスが多くの啓蒙書では欠け，すぐに「話題（問題）から答え」に急いで進んでいるからのように思える．そのステップを「問題からモデル」と「モデルから答え」の二つのステップに分けることを提案したい．応用畑の現象に関わる問題を数学的な視点から研究する際に，それらを数学の問題としてどのように定式化するかは難しいが大切なステップで，これが「問題からモデル」のステップにあたる．「モデル」を導くことができれば，次の「モデルから答え」のステップは知識を生かし問題を解決する知恵が働く場所となり，日常的な意味での確率と高度に抽象化された確率論に橋をかけることができるのではないだろうか．

本書も日常的な話題や小節の題名となるような話題に対して「問題から答え」の説明がとられている．しかし，第 14 章で，問題とする現象を「確率空間」の事象と捉え，「確率変数」を導入し，問題とする「事象」を表に出し，直和分解等の解析を行って，それが起こる確率を求めている．このステップが「問題からモデル モデルから答え」の一つの実現である．このステップを本書で日常的な問題を扱う際に徹底して行って欲しかった．それこそが訳者が言う「実用的問題を統一的な視点で眺めてみよう」になるのだと思う．そのために，確率空間，確率変数，確率過程の定義は必要だが，ルベーグ積分を表に出さなくても可能である．

社会現象・自然現象・工学現象・生命現象には興味深い不思議な事柄が現れることが多い．「学問に王道はない」とはいえ，このような現象に上で述べたステップで大胆にかつ謙虚さをもって切り込めば（そのステップが学問として確率論を研究する一つの道であることを心に秘めて），訳者が言う「確率の楽しさを味わってもらおうというものです」が実現するのだと思っている．

岡部　靖憲（東京大学大学院情報理工学系研究科）

書評



ランダム行列の基礎

永尾太郎著，A5 判上製，256 頁，本体 3800 円，東京大学出版会

本書はランダム行列理論の最先端の研究者が書き下ろしたランダム行列理論の入門書である．ランダム行列の研究の歴史は大変古く，その端緒は物理学でよくその応用がなされる量子力学とほぼ同時期にまで遡る．ランダム行列理論の解説は，すでに洋書では Mehta の教科書を始めとして数多くの教科書，解説書，論文選集などが出版されている．ランダム行列そのものを研究対象としない研究者を含め，それぞれ多くの人々によって読まれていると思われるが，本書の特徴は，現在第一線で活発にランダム行列理論の研究に直接関わっている若手の研究者によって書かれていることである．そのことを反映して，入門書としての基礎的な解説部分に加えて，著者自身の最新の成果をも含めた多くの新しい話題が盛り込まれている．いずれのパートも，計算に必要とされる仔細な技法から，具体的な計算に至るまで，丹念かつ平易な説明が試みられている．ランダム行列理論をその第一歩から解説した和書としては初めてのものであろう．

評者とランダム行列理論との関わりは，量子カオスのレベル統計，というその一断面に限られるが，そういった最近の話題を含めて，現在，ランダム行列理論は，基礎から応用に至るまで，数理物理・理論物理の中で幅広く横断的に顔を出す．理論自体の発展のタイムスケールも長い．ランダム行列の現れる物理の話題としては，古くは，原子核のエネルギー準位の統計則の問題がよく知られ，Wigner，Dyson，Mehta らにより，すでに 60 年代には十分な完成度を誇っていた感があるが，その後さらに，70 年代のスピングラスの問題への応用を経て，80 年代に入り，超行列法の導入，量子カオスのレベル統計に発見された普遍則などの問題を契機にして，さらに急速な進展を遂げた．Mehta によって書かれた “Random matrices” は，第 1 版が 1967 年に出版され，その後，第 2 版が 1990 年，そして第 3 版が 2004 年と，改訂されるごとになされる大幅な加筆をみても，この分野の長足の進歩とその内容の広がりを見てとれる．ちなみに，Mehta の教科書に引かれた Mehta 自身の論文の最も古いものは 1960 年，最新のものが 2002 年である．

構成は，ランダム行列に関わる諸々の計算を行うために有用な四元数，および外積によるヤコビアンの計算法の紹介から始まる．四元数は，剛体の回転運動や結晶構造の解析などに応用されることはよく知られるものの，物理ではそれほど頻繁に登場する概念ではない．ところが本書にみるように，四元数は，ランダム行列の一つのクラスである，シンプレクティックアンサンブルの行列要素として現れるだけでなく，任意数の準位間の相関関数，さらには，著者自身が導いた結果でもある，異なるアンサンブル間の間の遷移を記述する動的相関関数（四元数行列式表示をとる）など，ランダム行列を記述する核心部分にしばしば登場することがわかる．

それに続く前半部分は，ガウス型アンサンブルの導入とその固有値と固有ベクトルの平均密度の導出など，ランダム行列理論の最も基本的な部分の紹介に当てられており，これからランダム行列理論を学ぼうとする初学者，少しだけかじったことはあるが細かい部分まできちんとわかっていない（評者のような）生半可者には親切である．さらに，異なる対称性の間の遷移を記述するブラウン運動モデルの解説，固有値・固有ベクトルの平均密度，超行列法を用いた固有値の平均密度の導出などが続く．また，ガウス型アンサンブルの固有値の相関関数，その漸近形をいかにして求めるか，あるいは，数値計算では最も簡単に観察することができるものの，理論上は取り扱いの難しい最近接間隔分布の計算法など，細部に至るまで十分なページが割かれている．

本書の中で随所に，分野横断的に様々なところに登場するランダム行列の，物理学のみならず，生態学，さらには，金融工学などとの接点が示唆されている．たくさんの話題の中からの取捨選択は実際に本を書くのと同じような苦労があると思われるが，そういった問題の何をどうモデル化するとランダム行列が現れるか？ という点について多少なりともヒントが欲しかった．Mehta の教科書がそうであるように，著者自身の研究の進展と共に次なる改訂版に加筆されていることを期待したい．

首藤　啓（首都大学東京都市教養学部）

将棋を指す

コンピュータの数理……最終回

エピローグ

小谷 善行

早くも最終回になった．2005年に入ってコンピュータ将棋選手権でのエキジビションに始まるコンピュータ対人間の対戦が多く行われた．まずその総括をする．コンピュータ将棋はかなり強くなったと言われるが，よく分析してみるとかなり劇的である．さらに，今後，コンピュータ将棋を作ったり付き合ったりするための情報源を示す．最後にコンピュータ将棋とはわれわれ人間にとって何なのかを述べて終わりとしたい．

1. コンピュータ将棋はもうプロ棋士の強さに到達している？！

2005年の世界コンピュータ選手権では，以前に2回と同様に，プロ棋士の勝又清和五段と，優勝ソフトとのエキジビションマッチが行われた．優勝ソフトの激指は角落のハンデをもらった条件で完勝した．その際の様子は本連載や文献12) で報告した．その際，近い将来にコンピュータ将棋がプロ棋士の強さになると予測したのだった．

ところがそのあと，いくつかのイベントが行われて激指と人間との対戦がいろいろ行われた．それもさらに意外な結果になった．ひょっとすると，コンピュータ将棋はもうプロ棋士の強さに達しているかもしれないのである．

まずアマチュア竜王戦があった激指はそれに招待された．第18回アマ竜王戦全国大会が6月25・26日にチサンホテル浜松町で行われた．2勝して本戦に進出し，その後1勝1敗となり，16位以内を確定させた．そのあと2人のアマトップレベルの人と非公式対戦をして1勝1敗となり，結局4勝2敗というデータを残した．

その後，激指は2人のトッププロと対戦した（「将棋世界」2005年10号）．渡辺明竜王と木村一基七段が角落ちで激指アマ竜王戦バージョンと対戦した．結果は1勝1敗（渡辺勝ち，木村負け）であった．

2. 強さを推測する方法

端的に言うと，トッププロと角落ちで互角なら平均的プロ並みの実

力ということだ．これを数字で確かめてみる．プロ棋士のレーティングを計算しているウェブページ http://members3.jcom.home.ne.jp/tahigu/shogi/pro-rating.html（樋口達志氏による）がある．これをもとに，コンピュータ将棋の代表である激指がプロの中でどのあたりに位置するのかを求める．

このウェブページの現在のデータは 2005 年 6 月末までですべてのプロ棋士の対戦結果からレーティングを計算している．初期値として，A 級・名人を 3000 点，B 級 1 組を 2900 点，B 級 2 組を 2800 点，C 級 1 組を 2700 点，C 級 2 組を 2600 点，フリークラスを 2500 点という値からスタートして計算している．アマチュア，奨励会会員，女性棋士はそれぞれひとまとまりにしてレーティングを計算してあって，それぞれ，2582, 2626, 2488 になっている．男性プロ棋士は 152 人いて，レーティングの平均を求めると 2698 であった．2σ は 336 であった．つまり，分布にもよるが，2698 ± 336 に大部分（95%）が入る．トップの棋士は羽生善治で 3174，その後佐藤康光 3098，木村一基 3057，渡辺明 3056 と続く．

さて，レーティングとは強さの尺度を自動的に計算するものである．対戦するごとに値をやりとりする．レーティングが A の人が B の人に勝ったとすると，

$$16 - (\mathrm{A} - \mathrm{B}) \div 25$$

点を A のレーティングに加え，B のレーティングから引く（この値が 1 未満なら 1 に，15 より多ければ 15 にする）．仮に，A が 1200，B が 1000 だったとすると，このときには，この値は 8 になるので，それぞれのレーティングは 1208 と 992 になる．逆に B が勝った場合は，この値は 24 になるので，それぞれ 1176 と 1024 になる．このことを多数回対戦すると，ほぼそれ自身の強さに落ち着く，というのがレーティングの考え方である．

今度は A と B，二人の相互の勝敗確率とレーティングの関係を考える．A と B が対戦してそれぞれの勝つ確率を $p, 1-p$ としてみよう．そうすると多数回対戦して平衡状態になるときには，A のレーティングの変化の期待値がゼロであるので，

$$(16 - (\mathrm{A} - \mathrm{B}) \div 25)p - (16 - (\mathrm{B} - \mathrm{A}) \div 25)(1-p) = 0$$

となる．これから，

$$p = 0.5 \times (1 + (\mathrm{A} - \mathrm{B}) \div 400)$$

となる．例えば，A が 1200，B が 1000 だったとすると，A が B に勝つ確率は 0.75 ということになる．

レーティングの方式は，数値の変更部分については近似的な扱いである．たくさんの対戦で正確なものをもたらすという考え方に基づいている．上の p の式は実際には曲線的である．したがってこれでも一定数の対戦を利用すると個人のレーティングが予測できるのである．例えば，

A 氏がレーティング 1000 の人に勝ち，レーティング 1100 の人に負けたとする．その二人と対戦してそのように勝って負ける確率は，両者の積で求められ，

$$p(\mathrm{A}) = 0.5 \times (1 + (\mathrm{A} - 1000) \div 400) \times (1 - 0.5 \times (1 + (\mathrm{A} - 1100) \div 400))$$

となる．なお，この式を最大にする A はこの場合 1050 である．

3. 激指の強さの計算

上記ウェブページのレーティングを基準として，激指の最近の戦いからその強さを推測してみよう．アマチュアでの駒落ちとレーティングとの対応は，次のようになっている．香落 100 点，角落 250 点，飛落 350 点，飛香落 450 点，二枚落 600 点．つまり相手の角がないということは相手のレーティングが 250 低いというのと同じであるとする．これを使う．データは次のとおり

対勝又 1 勝
（彼のレーティング 2747 − 角落ち 250 = 2497 の人との対戦に相当）
対アマチュア 4 勝 2 敗（トップアマレーティング 2582）
対渡辺 1 敗
（レーティング 3056 − 角落ち 250 = 2806 の人との対戦に相当）
対木村 1 勝
（レーティング 3057 − 角落ち 250 = 2807 の人との対戦に相当）

以上の 9 局のデータについて現実に起きたことが，どのような確率で起きるものなのかを，激指のレーティングを様々に変えて計算した．その 9 個の確率を掛けた値が表 1 である．

表 1　激指の仮定レーティングと，実際の勝敗を生じる確率．

2540	0.00094
2560	0.00124
2580	0.00158
2600	0.00195
2620	0.00235
2640	0.00275
2660	0.00314
2680	0.00350
2700	0.00381
2720	0.00406
2740	0.00422
2760	0.00428
2780	0.00422
2800	0.00404
2820	0.00373
2840	0.00332
2860	0.00280
2880	0.00220
2900	0.00156
2920	0.00097
2940	0.00048
2960	0.00018
2980	0.00017
3000	0.00016
3020	0.00015
3040	0.00014
3060	0.00012

つまりこの対戦から言えることは，激指のレーティングとして一番あり得るのが 2760 あたりであるということである．なんとこれはプロ棋士の平均 2698 よりも高いのだ．勝又プロと同じくらいの強さになったということになる．

ここまででだいぶ驚かれたと思う．これは少し甘い評価かもしれない．辛めに評価するとレーティングが下がる．まず，角落ちのハンディキャップであるが，ここではアマチュアで使われているレーティング差，250 点によっている．プロになると，その差はより大きなものになるはずである．プロの場合の角落ちの差がその倍の，500 点だとすると，上記の 2760 は，80 くらい下がり，2680 程度になる．またアマチュアのレーティングを 2582 としたことであるが，これはトップ中のトップアマがプロと戦った成績である．激指の戦った相手は県代表クラスが中心と思われる．前者のレーティングが後者に比べて 100 くらい高いとすると，レーティングはさらに 60 くらい下がり，2620 くらいになる．最近，橋本プロ（レーティング 2817）とコンピュータ将棋のタコスが対戦してタコ

スが善戦したが負けた．タコスはコンピュータゲームオリンピアードでYSS に連勝するほどで非常に強くなっているソフトであるので，こうしたほかのコンピュータ将棋の結果も合わせるとコンピュータ将棋としてのレーティングは 2600 くらいになる．

これでも弱いほうのプロに匹敵する強さである．あと考えられることとしては，思考時間がある．上記の対戦は持ち時間 25 分とか 40 分とかである．このように短いとコンピュータに有利である．数時間の持ち時間だと，さらに差が 100 程度つくと予測している．そうするとレーティングは 2500 くらいになる．これは弱いプロの強さに相当する．少し付言すれば，ふだんでもレーティングは数十は変動しているので，その程度の誤差は当然あることに注意してほしい．

「近い将来にプロの強さに」でなくて「もうプロの強さになりつつある」と言ったほうがよいのだ．

4. コンピュータ将棋の情報源

コンピュータ将棋を作ったり，分析したり，様々なことをしてみたいと思われた方のために，書籍やウェブサイトを紹介しよう．

まず，文献 1～11) がコンピュータ将棋の技術に関する重要な文献である．コンピュータ将棋の科学技術が明確に進歩してきたこの 15 年の成果はこれらを見ると大体わかる．またここから参照することにより，他の論文に到達できるだろう．学会などのアカデミックソサエティとしては，コンピュータ将棋協会，情報処理学会ゲーム情報研究会，ゲームプログラミングワークショップ，コンピュータゲームコンファレンスの 4 つを押さえておくと良いだろう．

一般的な情報を得るためのコンピュータ将棋のウェブサイトとしてはコンピュータ将棋協会のもの（文献 18)）からスタートするのが良いだろう．多くの情報を含む関連サイトを文献 19～23) に示す．文献 24～33) はコンピュータ将棋システム作成者のウェブページである．積極的な発信をしているサイトも多く，よく見ていただきたい．

少なくとも情報のスタート場所としてこれらの文献・ウェブサイトは十分である．ぜひ人間のトップ（現在では羽生善治である）に勝つシステムを作ろう．コンピュータ将棋は複雑すぎると考えないほうがよい．今から作り始めても間に合う．2～3 年でコンピュータ選手権の本戦に出るものが今日までたくさんあったのである．これからも同じだろう．

5. おわりに，そしてコンピュータ将棋が勝った後の課題

本連載の最初にコンピュータの歴史を少し述べた．コンピュータは思念を実行することのできる初めての機械であった．そしてその実行すべきものは「明示的に記述できるものはすべて計算できる」という意味で汎用の機能を持つ機械であった．

したがって，「コンピュータによって人間と同様の知能を実現する」と

いう可能性を，50 年以上前から，誰しも思いつき，また信じた．ただこれは今日に至っても実現していないし目処が立っていない．一方，個別の問題については，人間以上の機能をコンピュータに持たせることが多方面にわたって証明されてきた．

ゲームの分野は，対戦者に勝敗を納得させる必要のため，ゲームの規則は機械的でなければならず，これはコンピュータにも都合のよいことになった．結果としてゲームはコンピュータや人工知能の実験問題として使われ，成果を出してきた．

コンピュータ将棋というものもこの中の一つの問題である．将棋の一定の複雑さや文化的背景により，チェスの場合より遅れたが，まさに今コンピュータ将棋は人間に追いつこうとしている．コンピュータゲームの進歩について，3 段階のステップを提案したことがある．それは，第一には，「一般人に勝てる」段階，第二は「人間のトップに勝てる」段階，第三は「神様に勝てる」段階である．

今第二の段階に到達しようとしているのである．ここ数年，長くて 10 年で人間を追い越すであろう．その際の熟慮が必要であることは何度か述べた．コンピュータ将棋に関わる側としては，コンピュータ文化および人間の心情をよく理解しなければならない．また，それで達成感が虚脱感を生み出してもいけない．

その先にある問題としては，上の第三の段階にチャレンジすることがある．神様に勝てるとは「将棋を解く」ということである．ゲームが解かれるということを意味する．例えば，6×6 オセロは数年前に解かれている．開始局面で先手と後手のどちらが勝ちか，または引き分けかが証明されるということである．将棋を解くというのは現在の科学では不可能である．まったく目処が立っていない．たぶん量子コンピュータが実現しても難しいであろう．50 年は無理であろう．ただ 100 年前の世界から今日の世界が想像できただろうか，と考えると，遠い将来にできると考えたい．

普通の科学技術で解ける問題の解かれる可能性については人間は過小評価してきた．一方，人間と同じようなものを作るということについては過大評価しているのだ．「人間と同様の知能を実現する」ということについて今もできていない．鉄腕アトムが書かれたように，そういうものが可能であると人間は夢想したのであるが．コンピュータ将棋を題材にするとすれば，「人間と同じように将棋を学ぶシステムがつくれるか」という問題が提起できる．これがコンピュータ将棋が人間に勝った後のもう一つの大きな課題である．

今日まで読んでいただいた読者に感謝する．ここでの話を踏まえて，数年のうちに起こるであろうコンピュータ将棋と人間のトップとの対戦をよく観察してほしい．またそのコンピュータ将棋の作成者になろうという人が読者から出てくれば素晴らしいと思う．

参考文献

1) 池泰弘：『コンピュータ将棋のアルゴリズム』, 工学社 4-7775-1110-3, 2005.
2) 松原仁編：『コンピュータ将棋の進歩 5』(in print), 共立出版, 2005.
3) 松原仁編：『アマ 4 段を超える コンピュータ将棋の進歩 4』, 共立出版, 2003.
4) 松原仁編：『コンピュータ将棋の進歩 3』, 共立出版, 2000.
5) 松原仁編：『コンピュータ将棋の進歩 2』, 共立出版, 1998.
6) 松原仁・竹内郁雄編：『ゲームプログラミング』, 共立出版, 1997.
7) 松原仁編：『コンピュータ将棋の進歩』, 共立出版, 1996.
8) 松原仁：『将棋とコンピュータ』, 共立出版, 1994.
9) David Levy, Monty Newborn, 小谷善行監訳：『コンピュータチェス』, サイエンス社, 1994.
10) 小谷善行, 吉川竹四郎, 柿木義一, 森田和郎：『コンピュータ将棋』, サイエンス社, 1990.
11) 森田和郎, 国枝交子, 津田伸秀：『思考ゲームプログラミング』, アスキー, 1986.
12) 小谷善行：コンピュータ将棋の歴史的瞬間—プロ棋士に角落ちで勝利・ついにプロの強さが射程範囲に, 情報処理, pp.811–813, Vol.**46**, No.07, 2005.
13) 松原仁：コンピュータ将棋はどのようにしてアマ 5 段まで強くなったか, 情報処理, pp.814–816, Vol.**46**, No.07, 2005.
14) 鶴岡慶雅：将棋プログラムの現状と未来 pp.817–822, Vol.**46**, No.07, 2005.
15) 小谷善行：飛車落ちのプロに勝ったコンピュータ将棋, 情報処理, pp.754–756, Vol.**45**, No.07, 2004.
16) 小谷善行：6 合目まできたコンピュータ将棋の実力, 情報処理, Vol.**44**, No.07, 2003.
17) 小谷善行：連載「将棋を指すコンピュータの数理」, 数理科学, 2004 年 1 月〜.
18) コンピュータ将棋協会, http://www.computer-shogi.org/
19) 情報処理学会ゲーム情報処理研究会, http://sig-gi.c.u-tokyo.ac.jp/
20) 日本将棋連盟, http://www.shogi.or.jp/
21) 将棋クラブ 24, http://www.shogidojo.com/
22) 詰将棋おもちゃ箱, http://www.ne.jp/asahi/tetsu/toybox/
23) 将棋パイナップル, http://shogi-pineapple.com/index.html
24) YSS と彩のページ(山下宏), http://www32.ocn.ne.jp/~yss/index_j.html
25) 柿木将棋, http://www02.so-net.ne.jp/~kakinoki/
26) 激指のページ, http://www.logos.t.u-tokyo.ac.jp/~gekisashi/
27) IS 将棋のページ, http://www.platz.or.jp/~isshogi/ および http://tanase.ameblo.jp/
28) タコスのページ, http://www.jaist.ac.jp/~t-hashi/TACOS/
29) KFEnd (有岡雅章), http://www31.ocn.ne.jp/~kfend/index.html
30) 最先端計数将棋学 (謎的電棋), http://professionalhearts.ameblo.jp/
31) GPS 将棋 (金子知適), http://www.sgtpepper.net/kaneko/diary/
32) うさぴょん, http://usapyon.dip.jp/shogi/computer/
33) Bonanza, http://www.geocities.jp/bonanza_shogi/

(こたに・よしゆき, 東京農工大学工学部)

ゲノム進化学の展開

第12回 ポストゲノム時代の進化解析

斎藤 成也

12.1「ポストゲノム」とは

本連載も，終わりに近づいて来た．そこで，最後の3回を脳神経系の進化の話として，ゲノム進化そのものに関しては，今回で終わりとしたい．終わりを飾るにふさわしいのは，ポストゲノム研究に関する話題だろう．

ヒトゲノムの塩基配列が95%ほど決定され，概要配列として発表された2001年ごろ[1]までには，すでにゲノム配列決定計画の次の段階が模索されていた．それらを総称して「ポストゲノム計画」と呼ぶことが多い．ゲノム（genome）の末尾“-ome”は，本来染色体（chromosome）の末尾部分由来であるのだが，近年になって，「ある生物の持つ遺伝子の全体」というゲノムの定義の「全体」を意味するかのようにすりかえられてしまい，次々と「～オーム」という名前が提唱されていった．いわく，プロテオーム（タンパク質），トランスクリプトーム（転写されたRNA），グライコーム（糖），メタボローム（代謝物質），などなど．-ome を -omics に変えると，「～全体解析学」となる．私自身も，ゲノム規模のSNP（単一塩基多型）データを使った解析を「SNP-omics」と名づけたことがある[2]．今回は，このようなポストゲノム計画において生成されたデータの進化学的解析について説明しよう．

個々のデータについては，RNAの塩基配列であったり，発現されたRNA量だったり，タンパク質の立体構造だったりと，昔から研究されているものだが，従来想像もされなかった膨大なデータの生成が，いわゆるポストゲノム計画の特徴である．このような段階になると，コンピュータの利用は必要不可欠となり，むしろデータ生成とデータ加工が混然一体としてくる．ここに，いわゆるバイオインフォマティクス（bioinformatics）が誕生した．片仮名の名前が定着しつつあるのは，学問にとって決してふさわしいことではないと思うので，ここでは「生命情報学」としておきたい．生物学者にとっては，生命情報学は便

利な道具箱にすぎないが，道具がいつのまにかその使用者と主従関係を逆転させるということも，世の中にはあり得る話である．

12.2 大規模に決定された転写 RNA 塩基配列の進化的解析

ふたたび塩基配列データではあるが，ここではゲノム配列そのものではなく，ゲノム DNA から転写された RNA の配列を問題とする．DNA は単なるヌクレオチドのつながりにすぎないが，RNA 分子は，細胞中に存在すれば代謝に関して何らかの意味を持っていると考えられている．そこで，DNA ゲノム配列のどの部分が転写されるのかは，重要な問題である．細胞中の RNA 分子としては，リボゾームを構成する rRNA，遺伝暗号表の情報を担う tRNA，アミノ酸配列の情報を与える mRNA が以前からよく知られている．近年になって，そのほかにも多種多様な RNA の存在が知られるようになってきた．これらすべての RNA をひっくるめて「トランスクリプトーム」(transcriptome) と呼ぶ．いくつかの特殊な方法を用いて細胞中から RNA を抽出し，逆転写酵素で cDNA にして，その塩基配列を大規模に決定するという方法がとられる．

このほかにも，これら RNA の塩基配列とゲノム DNA の塩基配列を比較することにより，スプライシングや，RNA 編集のパターンが推定できる．「スプライシング」(splicing) とはつぎはぎをするという意味だが，ここでは隣り合うエクソンとエクソンの間に位置するイントロンを取り除いてエクソン同士をつないで行く操作を指す．また「RNA 編集」(RNA editing) とは，いったん DNA の塩基配列情報を転写によって RNA 分子に移した後，一部の RNA 配列を変更することを指す．まだ謎が多いが，いくつかのパターンがあり，RNA 編集をしなければまともなタンパク質ができないこともある．どちらも RNA 配列と DNA 配列を比較して初めてわかる違いなので，生物学的に重要である．「スプライシング」については，同一遺伝子であっても，多数のエクソンを持つ場合に，いろいろな順番でエクソンをつぎはぎすると，多数の組み合わせが可能となる．実際に，単一の遺伝子から多数の mRNA が生成されることがある．このことから，ヒトゲノムには「わずか」2 万～3 万個程度の遺伝子しかないが，スプライシングによって一つの遺伝子から平均して 4～5 個程度の変異体が生じるので，これらを別々に数えれば，遺伝子産物の種類は 10 万個ほどになるという議論がある．

しかし，生物の一つ一つの細胞で，果たしてスプライシングが常に完璧に行われているだろうか．エクソンとエクソンの間に介在するイントロンは，時として極めて長い場合がある．つぎはぎに失敗することも十分考えられる．このように，転写段階で失敗があっても，複製するときにまともなタンパク質になるかどうかのチェックがあるので，そのような変な RNA は実際にはほとんど役に立たずに消えていっているだろう．ところが，大規模な実験をするときには，ありとあらゆる RNA を用いてそれらの塩基配列を決定するので，生きた細胞の中では重要ではなくても，配列データとして残されてしまい，ありがた

表 12.1　EST が大量に決定されている主な生物種と総数.

生物種	EST 総数
ヒト	6,133,785
マウス	4,334,145
アフリカ熱帯ガエル	1,030,804
ラット	701,057
カタユウレイボヤ	684,319
ゼブラフィッシュ	651,991
ウシ	624,652
コムギ	599,989
ニワトリ	554,084
トウモロコシ	550,998

（データ：NCBI dbEST 〈www.ncbi.nlm.nih.gov/dbEST/dbEST_summary.html〉 より）

く取り扱われている可能性がある．もちろん，生物学的な意味のわかっているスプライシングの変異体も存在するが，かなりのものは，がらくただと考えたほうがいいのではないかと，私は考えている．

一方，RNA 編集は，謎めいている．基本的なパターンがなく，多様なメカニズムがありそうだというのも，不思議である．ただ，ゲノムの塩基配列が改変されるといっても，改変機構そのものは，やはりゲノム情報で規定されているはずである．最近，エピジェネティクス[3]という現象が注目を集めているが，親から子に伝えられた遺伝子が変更されるとはいえ，この場合も RNA 編集と同様に，その変更メカニズムそのものはゲノム情報のどこかに書き込まれているはずである．

多数の RNA 配列を得ようとすると，簡単なスクリーニング法が必要となるが，その一つが，メッセンジャー RNA に特徴的なポリアデニン（AAAAA･･･という塩基配列）を認識して，そこから数百塩基だけの並びを決定する EST (Expressed Sequence Tag) である．ヒトゲノムを初めとして，現在では多様な生物種の EST が決定されており，塩基配列データベースの半分以上を占めている．表 12.1 に，EST が大量に決定されている生物種ベスト 10 を掲げた．

ここまで書いたところで，巨大な RNA 配列データが，日本の理化学研究所を中心とする研究グループによって最近発表された．以前からマウスの研究を行っていたグループが，18 万個余りの RNA 転写開始点を決定したのである[4]．これら新たに配列決定されたものと既存の mRNA 配列データを合わせて解析した結果，約 21000 種類のタンパク質をコードする RNA 配列と，それよりも多い 23000 余の，アミノ酸配列をコードしていない RNA 配列が発見された．進化的に興味深いのは，後者の 1 割ほどはヒトゲノムと対応がつき，しかも転写開始点の上流 5 kb まで，ヒトとマウスのゲノム配列が平均して 70%以上の一致度を示していた点である．一部とは言え，この相同性は，タンパク質をコードする前者の RNA 配列よりも高い値である．ただし，ゲノムの大部分が，がらくた DNA から構成されているという従来の観点が否定されるには至っていないと思われる．

12.3 RNA 発現パターンの進化的解析

また RNA の話だが，今度は塩基配列ではなく，細胞の中で RNA がどれくらい作られているか，という転写量の問題である．多細胞生物では，細胞が属する組織によって，同じゲノムを持っていても，ある組織では遺伝子 A がたくさん転写され，別の組織では遺伝子 A より遺伝子 B のほうがずっと多く転写されていることがあり得る．ゲノム塩基配列の情報を生かして，多数の遺伝子の転写量を簡単に測定するのが，DNA チップである．

すでにいろいろな研究が行われているが，最近発表された進化的研究を紹介しよう[5)]．ドイツのマックスプランク進化人類学研究所のグループが行ったものであるが，脳，心臓，腎臓，肝臓，精巣という 5 種類の臓器について，多数の遺伝子の発現パターンをヒト 6 個体とチンパンジー 5 個体で比較したものである．どの臓器についても，ヒトとチンパンジーが種としてまとまりを持っており，種間の違いがもっとも大きいのは，精巣だった．逆に種間の差が最小なのは脳だった．これは，機能的に重要な部分ほど進化的な制約が強いという中立進化のパターンで説明することができる．精巣は生殖系列の細胞を有しており，重要ではあるが，その遺伝子発現がきちんと制御される必要性はあまりない．それに対して，脳は膨大な神経細胞を要し，莫大なエネルギーを費すので，遺伝子の発現調節が高度に制御されている必要がある，と解釈できる．

12.4 代謝ネットワークの進化

生命現象の基本は，多種多様な分子が形を変えながら共存してゆく状態である．これを「代謝」(metabolism) と呼ぶ．代謝をつかさどるのは，酵素である．一つの生物は多数の酵素を有するが，それらは代謝される前段階の基質と酵素反応の結果生み出された産物とともに，代謝ネットワークを形づくる．図 12.1 に，代謝ネットワークの実例として，TCA 回路をあげた．代謝ネットワークの

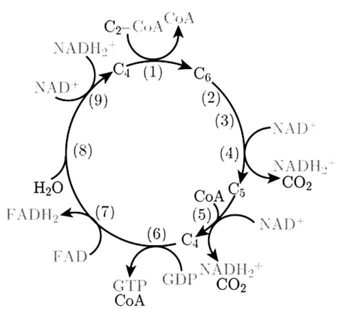


図 12.1　TCA 回路．(1)～(9) は酵素を意味する．C_2～C_6 は，各分子が持つ炭素原子の数を表す．

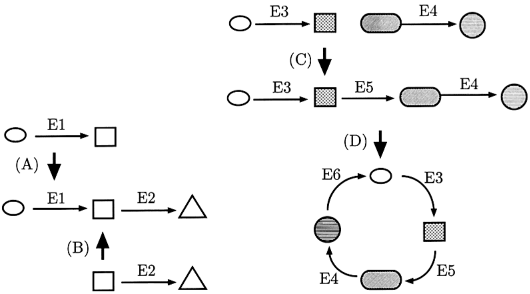


図 12.2　代謝ネットワーク進化の模式図．(A) 代謝最終産物に変化が次々に加えられてゆく場合．(B) 代謝最終産物の前駆体が次々に加えられてゆく場合．(C) 既存の 2 代謝系が新たな酵素の出現によって結びつけられる場合．(D) 線形だった代謝系が環状になる場合．E1～E6 は酵素を，様々な図形は異なる分子を示す．

実際については，KEGG データベース（www.genome.ad.jp/kegg/）を参照されたい．

これら複雑なネットワークはすべて進化の産物であるはずだが，どのようにしたら，その進化を段階的に解きほぐすことができるだろうか？ 昔からある考え方として，一連の反応を媒介する酵素系が，段階的に生じてきたというものがある．これには，代謝最終産物に変化が次々に加えられてゆく場合（図 12.2 A）と，代謝最終産物の前駆体が次々に加えられてゆく場合（図 12.2 B）の 2 つの方向性がある．前者では，比較的複雑な最終代謝産物がさらに分解されるようになるのに対して，後者ではより複雑な基質を分解できるようになる．どちらの場合も，基質が似通っているときには，反応も似通ったものになる可能性があるので，触媒となる酵素（図 12.2 A では E1 と E2）も，祖先が共通であったかもしれない．

代謝系が複雑になってゆくと，既存の 2 代謝系が新たな酵素の出現によって結びつけられる場合（図 12.2 C）も考えられる．このケースでは，既存の酵素（図 12.2 では E3 と E4）の間でも，新しい酵素（図 12.2 では E5）とも，相同性はまったくないことがあり得る．また，環状の代謝経路が形成される場合（図 12.2 D）がある．具体例としては，図 12.1 に示した TCA 回路，窒素代謝に関連するオルニチン酸回路があげられる．代謝ネットワークは，生化学の長い歴史の中で構築されてきたものだが，その部分集合であるタンパク質相互作用については，最近になって，大量解析が可能になり，ポストゲノム研究の一分野となっている．ただ，これらの複雑な代謝系がどうやって進化してきたかという問題については，まだまだ未踏の分野であると言えよう．

12.5 タンパク質立体構造の進化

タンパク質は基本的に20種類のアミノ酸が連なったものだが，4種類のヌクレオチドがつながって二重らせん構造のみをとるDNAと異なり，はるかに複雑で多様な構造を持つ．これは，アミノ酸の種類が多いことと，アミノ酸という単位分子そのものの性質から来ている．

国際的な塩基配列データベースには，日欧米で共同構築されているDDBJ/EMBL/GenBankがあるが，アミノ酸配列のデータベースでは，UniProtが同じく国際的に構築されているものである．タンパク質の立体構造のデータベースとしては，PDB（Protein Data Bank）があるが，これはX線やNMRを用いて実験的に推定されたタンパク質の立体構造の情報をリストしたものである．ほかにも，立体構造の単位であるタンパク質のドメインのデータベースであるPFAMなど，いろいろな種類のデータベースがある．多種多様なタンパク質の進化を研究するには，これらデータベースの利用が必須である．

ここで，私のいる国立遺伝学研究所で運営されているゲノム規模のタンパク質の立体構造GTOP（spock.genes.nig.ac.jp/~genome/gtop-j.html）を紹介したい．GTOPデータベースは，ゲノムにコードされる全タンパク質の配列データを解析した結果をまとめたデータベースである．国立遺伝学研究所の西川建教授のグループが構築しており，DDBJ（日本DNAデータバンク）から公開している．アミノ酸配列の相同性解析をあらかじめスーパーコンピュータを用いて行い，タンパク質の立体構造の情報を積極的に利用していることが特徴である．GTOPは，“Genome TO Protein”を意味している．

図12.3に，GTOPのエントリーの例を示した．立体構造が決定されているタンパク質の数は増加しているものの，まだまだ多数のタンパク質が，アミノ酸配列のみの情報しかわかっていない．そこで，アミノ酸配列の相同性があれば立体構造も類似しているという経験則を用いて，配列相同解析によってすべてのアミノ酸配列の立体構造を予測しているのである．このような便利なデータベースを用いて，タンパク質立体構造の進化研究が今後急速に進展することが期待される．なお，GTOPの説明については，文献6)をご覧いただきたい．

12.6 さらに大規模なゲノム配列の決定時代へ

この原稿を書いているあいだに，チンパンジーゲノムの論文が発表された[7)]．全ゲノムショットガン法を用いて，ゲノム全体の90%を決定したものだが，BAC（バクテリア人工染色体）クローンの塩基配列決定法を用いて昨年我々が発表したチンパンジー22番染色体の精密配列[8)]に比べると，ゲノムに対するカバー率は高いが，配列の精度は低く，数キロベースごとに切れ切れとなっている．それでも，ゲノムの大部分の塩基配列が決定されたことは大きい成果であり，本論文は，ダーウィンが1871年に出版した『人間の由来』[9)]から始めた，格調の高いものになっている．

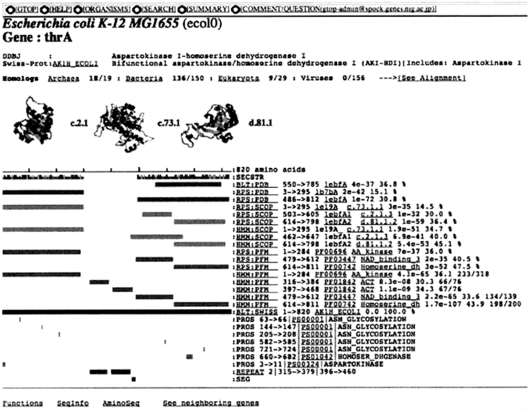


図 12.3　GTOP エントリーの例．大腸菌の遺伝子 thrA の産物．先頭部分には，生物種名，GTOP で用いられる遺伝子名，ゲノムプロジェクトにより割り当てられた遺伝子産物の名称，Swiss-Prot のエントリが記述してある．次の “Homologs” は，古細菌，真正細菌，真核生物，ウイルスの順に，進化的に相同な遺伝子（ホモログ）のある生物種の数が表示されており，各生物分類グループ名をクリックすると，それらのリストが表示される．画面上にその次に示されている小さな画像は，このタンパク質で予測された立体構造を表す．画像のあとの数字は SCOP の分類番号である．このエントリーでは，c.2.1, c.73.1, d.81.1 の 3 種類の立体構造が予測されている．立体構造画像の下に示されているバンド様のリストは，このタンパク質のアミノ酸配列の二次構造予測結果（SECSTR），およびそれに続いて，PDB, SCOPP, PFAM, SWISSPROT, ProSite というタンパク質のいろいろなデータベースのエントリーと対応する部分が表示されている．

このように，モデル生物（大腸菌，エレガンス線虫，ショウジョウバエ，マウスなど，遺伝学研究でこれまで中心的に使われてきた生物）のゲノム決定の後には，続々とそれらの近縁種ゲノムが決定されている．それら塩基配列を比較することにより，未知の機能領域を発見できる可能性があるので，今後もゲノム配列決定は，ちょっと矛盾する言い方ではあるが，ポストゲノム時代の中核であり続けるだろう．

近縁な生物を比較することによって，遺伝子の構造や機能が短期間に大きな変化をした場合，その変化を詳細に解析することが可能になる．また，同じグループに属する生物のゲノムを比較することによって，各生物の特異的変化だけでなく，その生物グループで新たに出現した進化的な保存領域を発見することも可能である．

ゲノム進化の他の側面については，このほか，文献 10,11) を参照されたい．

参考文献

1) International Human Genome Sequencing Consortium, Initial sequencing and analysis of the human genome. *Nature*, **409**: 860–921 (2001).
2) 斎藤成也，ヒト 21 番染色体とチンパンジー 22 番染色体の "Comparative SNP-omics". DNA 多型，**12**:11 (2004).
3) 佐々木裕之，『エピジェネティクス』，岩波科学ライブラリー (2005).
4) The FANTOM Consortium and RIKEN Genome Exploration Research Group and Genome Science Group, The transcriptional landscape of the mammalian genome. *Science*, **309**, 1559–1563 (2005).
5) P. Khaitovich, I. Hellmann, W. Enard, K. Nowick, M. Leinweber, H. Franz, G. Weiss, M. Lachmann, S. Paabo, Parallel patterns of evolution in the genomes and transcriptomes of humans and chimpanzees. *Science* (2005).
6) 菅原秀明・五條堀孝編，『DDBJ の利用法』，共立出版 (2005) .
7) The Chimpanzee Sequencing and Analysis Consortium, Initial sequence of the chimpanzee genome and comparison with the human genome. *Nature*, **437**, 69–87 (2005).
8) The International Chimpanzee Chromosome 22 Consortium, DNA sequence and comparative analysis of chimpanzee chromosome 22. *Nature*, **429**, 382–388 (2004).
9) Darwin, C, The Descent of Man, and Selection in Relation to Sex. D Appleton and Company, New York (1871).
10) 斎藤成也，『ゲノムと進化』，新曜社 (2004).
11) 石川統・斎藤成也・佐藤矩行・長谷川真理子編，シリーズ進化学第 2 巻，『遺伝子とゲノムの進化』，岩波書店（近刊）.

（さいとう・なるや，国立遺伝学研究所）

2005年 (1月号～12月号) 総目次

Vol. 43, No. 499～Vol. 43, No. 510

■連　載

■リレー連載

■その他の論文・エッセイ

■研究室の窓

■書　評

特　集（2006年2月号予告）

物理法則の直観的理解

物理における直観的理解とは	柴田　文明
古典力学	宮下　精二
絵で見る電磁気学	小野　嘉之
素粒子物理	林　　青司
トポロジーからの相転移	川村　　光
直感的宇宙論	森川　雅博
エントロピー増大の法則と熱平衡状態への漸近	有光　敏彦
量子力学における時間発展と測定	番　　雅司
結び目や絡み目，組みひもと可積分量子系の数理物理	出口　哲生
《名著に親しむ》 思い出す名著	江沢　　洋

本体952円

特　集（2005年12月号）

現代代数学への誘い

多彩な魅力と新世紀の展望

現代代数学の点描	桂　　利行
モンスターの生息地を探す	原田耕一郎
表現論の光芒 Hecke環をめぐる7つの物語	庄司　俊明
類体論—代数的数論—ガロアの逆問題	三宅　克哉
数論幾何の発展	加藤　和也
可換環論の最近の発展	渡辺　敬一
代数多様体論	川又雄二郎
量子群と数理物理	三輪　哲二
共形場理論 交錯する多彩な数学	土屋昭博・山田泰彦
《連載》 計算神経科学への招待　その6	銅谷　賢治
ゲノム進化学の展開　その11	斎藤　成也
《確率的情報処理と統計力学》 最終回	西森　秀稔

本体952円

編集後記

コンピュータ将棋が人間のトッププロに勝つという来るべき事態に対する残念な思いは何に由来するのだろう．相手はシステムの親（考案者）とシステム自身との「準備」,「実戦」を分業する二者一組とも考えられる．（当然ながらこの準備は実戦への備えとして対局者のするそれとは異なる．）最善手の応酬が「人間の代表」であるトッププロ同士の対局以外からも生まれうるということが「本番の生きた戦い」に価値を見出す人々に違和感を覚えさせるのかもしれない．

「将棋を指すコンピュータの数理」が今月で最終回を迎える．ご愛読有り難うございました．（平勢）

＊　　＊

今回のテーマは“偶然と必然”でしたが，いかがでしたでしょうか？

狂言の「梟（ふくろう）山伏」という曲目は，梟の霊にとり憑かれた男を治すために山伏を呼んだ所，祈祷をしているうちに偶然にも依頼人がとり憑かれて，気づいたら山伏本人までもがとり憑かれてしまう…という滑稽な話なのですが，それをみて笑っている自分も梟になった気までしてくるようで，よく考えると今の社会や世相をうまく映しているなあと感じました．

小さな偶然の積み重なりが予想もしない必然を導いているとしたら，何だかうかうかしていられませんね．（伊崎）

数　理　科　学　1月号

2006年1月1日発行　　発行人　森　平　勇　三

数理科学編集部
TEL. (03) 5474–8816
FAX. (03) 5474–8817

編集スタッフ
平勢耕介　伊崎修通
秦はるひ

ホームページ　http://www.saiensu.co.jp
ご意見・ご要望は　sk@saiensu.co.jp　まで．

発行所 © 株式会社 サイエンス社　TEL. (03) 5474–8500 (代表)
〒151–0051 東京都渋谷区千駄ヶ谷1–3–25　振替 00170–7–2387　(03) 5474–8600 (広告部)

印刷・製本　三美印刷株式会社　山岡景仁

臨時別冊・数理科学

SGCライブラリ

(The Library for Senior & Graduate Courses)

近年，特に大学理工系の大学院の充実はめざましいものがあります．しかしながら学部上級課程並びに大学院課程の学術的テキスト・参考書はきわめて少ないのが現状であります．本ライブラリはこれらの状況を踏まえ，広く研究者をも対象とし，**数理科学諸分野**および**諸分野の相互に関連する領域**から，現代的テーマやトピックスを順次とりあげ，時代の要請に応える魅力的なライブラリを構築してゆこうとするものです．
装丁の色調は，

数学・応用数理・統計系（黄緑），**物理学系**（黄色），**情報科学系**（桃色），
脳科学・生命科学系（橙色），**数理工学系**（紫），**経済学等社会科学系**（水色）

と大別し，漸次各分野の今日的主要テーマの網羅・集成をはかってまいります．

表示価格はすべて税抜きです

1 **カオスと量子物理学**
中村勝弘著　本体 1857 円

3 **シュレーディンガー方程式**
仲滋文著　本体 1790 円

4 **量子コンピュータの基礎**
細谷暁夫著　本体 1857 円

5 **有限体と符号理論**
内田興二著　本体 1667 円

8 **差分方程式講義**
広田良吾著　本体 1857 円

9 **生命をつくる**
中野馨著　本体 1524 円

10 **計算物理入門**
上田顯著　本体 1381 円

11 **エコノミックゲームセオリー**
船木由喜彦著　本体 1429 円

12 **演習 場の量子論**
柏太郎著　本体 1886 円

13 **複雑系脳理論**
津田一郎著　本体 1429 円

16 **有限要素法による構造解析事例集**
白鳥正樹・三好俊郎編著
本体 1429 円

17 **基礎からの力学系**
小室元政著　本体 1886 円

18 **独立成分分析**
甘利俊一・村田昇 共編著
本体 1667 円

20 **物理数学ノート**
佐藤光著　本体 1819 円

21 **数学の未解決問題**
上野健爾・高橋陽一郎・中島啓共編
本体 1886 円

23 **微分幾何講義**
二木昭人著　本体 1857 円

24 **脳の謎に挑む**
茂木健一郎編著　本体 1829 円

25 **量子場脳理論入門**
高橋康監修・保江邦夫著
本体 1876 円

26 **脳型コンピュータの実現に向けて**
甘利俊一編著　本体 1857 円

27 **ガロア理論**
中野伸著　本体 1790 円

28 **量子可積分系入門**
白石潤一著　本体 1876 円

29 **伝えるための理工系英語**
宮野健次郎著　本体 1429 円

30 **応用のための関数解析**
吉田善章著　本体 1800 円

31 **分子コンピュータの現状と展望**
萩谷昌己編著　本体 1524 円

32 **量子情報理論入門**
林正人著　本体 1886 円

33 **工学のための非線形解析入門**
藪野浩司著　本体 1857 円

34 **経済における確率的モデルへの招待**
青木正直著
青山秀明・藤原義久 監訳
本体 1886 円

35 **賭けの数理と金融工学**
竹内啓著　本体 1429 円

36 **応用のための確率論・確率過程**
松本裕行著　本体 1876 円

37 **情報理論の基礎**
村田昇著　本体 1619 円

38 **複素ニューラルネットワーク**
廣瀬明著　本体 1695 円

39 **マクスウェル方程式**
北野正雄著　本体 1876 円

40 **制御理論講義**
木村英紀著　本体 1886 円

41 **バイオインフォマティクスの基礎**
冨田勝監修・斎藤輪太郎著
本体 1857 円

42 **トポロジー入門**
田中利史・村上斉共著
本体 1886 円

43 **アルゴリズムと計算量**
谷聖一著　本体 1857 円

44 **ゲーム理論のフロンティア**
池上高志・松田裕之 共編著
本体 1829 円

のご案内

ゲノム創薬
個別化医療とゲノムデータマイニング
野村仁 著
A5／152頁／本体1600円

実際のヒトゲノム情報の検索の仕方や，既存薬を具体的な例に取っての創薬の歴史，ゲノム情報を元に研究が進められている最新の創薬などを盛り込んだ，非常に含蓄のある1冊.

情報処理システム入門
［第3版］
浦昭二・市川照久 編
A5／約320頁／予価1800円

時代の流れを考慮し，第1部コンピュータシステムのしくみ，第2部情報処理の基本形，の2部構成とした．分り易く簡潔な解説，見開・2色刷等は前著までの方針を踏襲.

計算理論とオートマトン言語理論
コンピュータの原理を明かす
丸岡章 著
A5／288頁／本体2000円

本書はオートマトンと言語理論，計算可能性の理論，計算量の理論を解説．図や例題を多く用いて直観的に分かるよう工夫した.

C言語による
数値計算入門
解法・アルゴリズム・プログラム
皆本晃弥著
B5／240頁／本体2400円

大学・短大・高専等で行われている「数値解析」や「数値計算」と名の付く講義での利用，あるいは独学で数値計算を学ぼうとしている読者向きの入門書．数値解法の導出に関する数学的な背景を丁寧に述べた上で，具体的なアルゴリズム及びプログラムを示した.

ザ・Linux
戸川隼人著
A5／約150頁／予価1500円

第2のコンピュータリテラシとして書かれたLinuxのテキスト．最低限必要な事項を中心に，Linuxの操作法と日常的に使うツールを説明．GUI利用をするWindowsに近い操作と，伝統的なLinuxの操作法を併記した.

実習Excelによる表計算
入戸野健・柴田博 共著
B5／200頁／本体1450円

Excelを用いた表計算ソフトを利用するための教科書．基本的な操作から，関数の利用，グラフの作成など，多数の例を用いて解説．さらに，データベースとしての利用法，マクロの作成，アドインソフトの利用など，進んだ利用法も具体的な例を用いて学ぶ.

表示価格はすべて税抜きです

サイエンス社

数学テキスト好評書より(1)

工科系の数学
マイベルク・ファヘンアウア共著／A5

1	数，ベクトル，関数	本体1700円
2	微分積分	本体1800円
3	線形代数	本体1800円
4	多変数の微積分	本体1800円
5	常微分方程式	本体2300円
6	関数論	本体2200円
7	フーリエ解析	本体1600円
8	偏微分方程式，変分法	本体1700円

ミュンヘン工科大学での基礎課程の講義をもとにつくられた，例，例題を多く含む教科書の翻訳．高見穎郎，薩摩順吉，及川正行訳．

基礎課程線形代数
吉野雄二著／A5／240頁／本体1700円
著者の講義経験が生かされ，授業の不足点を補うことができるよう構成された好個の教科・参考書となっている．

線形代数 増訂版
寺田文行著／A5／200頁／本体1262円
好評の前著「線形代数」をもとに，使い易さを中心に考え，内容を入れ替え，問題を難易別に配列した．

理工系 線形代数
水田義弘著／A5／216頁／本体1600円
自然科学等で広く利用されている応用例も加え，数学的なものの見方を身につけることに重点をおいたテキスト．２色刷．

Key Point & Seminar
工学基礎 線形代数
矢嶋徹・及川正行 共著／A5／264頁／本体1850円
例題の解答は計算式や計算の仕方が細かく書かれており，理解しやすい内容になっている．見開き構成．2色刷．

線形代数講義
金子晃著／A5／272頁／本体1850円
本書は理工系の大学基礎課程で線形代数学を一通り学ぶための教科・参考書である．高校の内容に無理なく繋がるよう，幾何学的説明を中心にわかりやすくまとめられている．

基礎 線形代数 [新訂版]
洲之内著／田中改訂／A5／192頁／本体1600円
定評ある旧版に，体裁面で大幅な変更を加え，見た目のわかりやすさも追求した．工科系の学生には最適のテキスト．

線形代数の基礎
寺田文行・木村宣昭共著／A5／176頁／本体1480円
左ページに解説，右ページにそれに関連した図や小問を配置するように配慮した．高校数学とのつながりにも配慮しわかりやすく解説．2色刷．

大学で学ぶ
線形代数
沢田・渡辺・安原共著／A5／128頁／本体1000円
理工系に限らず，社会科学系の入門者にも配慮した，コンパクトなテキスト・参考書．

表示価格はすべて税抜きです

サイエンス社

数学テキスト好評書より(2)

数理系のための
基礎と応用 微分積分I, II
金子晃著／A5／Ⅰ：256頁／本体1800円
Ⅱ：280頁／本体1950円
レポートやプログラム，期末試験の問題と解答・講評などを盛り込んだ親しみやすいテキスト．

基礎課程 微分積分I, II
西山享著／A5／Ⅰ：208頁／本体1380円
Ⅱ：136頁／本体1280円
第Ⅰ巻では１変数の微積分，第Ⅱ巻では多変数の微積分と微分方程式を扱っている．２色刷．

改訂 微分積分
洲之内治男・和田淳蔵共著／A5／232頁／本体1280円
高校における数学教育を考慮し，例題等を厳選し，直観的理解を重視した改訂版．前著同様に１年間の講義用テキストとして章だてされている．

理工系のための
基礎と応用 微分積分
計算を中心に
山本昌宏著／A5／288頁／本体1850円
理工系の基礎として要求される微積分学の計算技術習得を目指している．

微分積分概説
長瀬・芦野共著／A5／256頁／本体1750円
まず概説的な形で微分積分の基本的な事柄を述べ，その後あらためて数学的に厳密に考えてみるよう章の配置を考慮した．２色刷．

入門微分積分
水田義弘著／A5／200頁／本体1700円
高校数学とのつながりに配慮し，証明の基本的なアイデアを読みとれるよう工夫．微分方程式や偏微分方程式についても解説．２色刷．

微分積分概論
越昭三監修／高橋・加藤共著／A5／224頁／本体1700円
豊富な例題や章末問題等は，実力の涵養に最適．偏微分法や重積分法まで十分にカバーした理工系の学生にとって格好の教科・参考書．

理工基礎 微分積分学I, II
I: 1変数の微積分　II: 多変数の微積分
足立恒雄著／A5／ I: 184頁／本体1600円
II: 192頁／本体1600円
1変数，および多変数の微分積分について基礎から丁寧にわかりやすく解説．

微分積分の基礎
寺田・中村共著／A5／208頁／本体1480円
高等学校の「数学Ⅱ」までの知識で学ぶことができる．例や図を多用したわかりやすい解説．見開き体裁・２色刷．

大学で学ぶ
微分積分
沢田・渡辺・安原共著／A5／120頁／本体1000円
入門者が微分積分の世界に入りやすいように配慮し，基本的な定理・例題を扱った，テキスト・参考書．

表示価格はすべて税抜きです

サイエンス社

数学テキスト好評書より(3)

数学テキスト好評書より(4)

ベクトル解析の基礎
寺田文行・木村宣昭共著／A5／120頁／本体1250円
完全見開き形式となっているため見易く，また，図や例が豊富なので非常に理解し易いテキストとなっている．

フーリエ解析・ラプラス変換
寺田文行著／A5／112頁／本体1200円
フーリエ解析とラプラス変換を具体例や問などを豊富に用いて，各項目を見開き形式で簡潔かつわかりやすく解説．

フーリエ解析とその応用
洲之内源一郎著／A5／124頁／本体1480円
フーリエ解析を数学的厳密さを失わず平易に論じ，その応用として偏微分方程式の境界値問題の解法を中心に具体例を選びながら解説したテキスト．

集合と位相への入門
ユークリッド空間の位相
鈴木晋一著／A5／168頁／本体1650円
興味や必要に応じて学べるよう工夫し，問題には詳しい解答を付けた．

統計解析入門
篠崎信雄著／A5／312頁／本体2200円
慶應義塾大学総合政策学部での講義をもとにまとめられた入門テキスト．統計学の基本的な考え方を具体的な諸例を通して解説．

位相入門
距離空間と位相空間
鈴木晋一著／A5／160頁／本体1600円
ユークリッド空間の知識を礎に「距離空間」と「位相空間」を丁寧に解説した入門書．

理工基礎 確率とその応用
逆瀬川浩孝著／A5／200頁／本体1800円
日常よく耳にする話題を中心に興味をそそられる例を示し，考える力を養うことに主眼を置いた．

理工系 確率統計
中村忠・山本英二共著／A5／184頁／本体1450円
実際の現象をモデル化したり，解析できることを目標とし，例題や例を多く配置するなど工夫されている．

情報数学の基礎
寺田・中村・釈氏・松居共著／A5／176頁／本体1600円
高等学校「数学Ｉ」のみを履修していれば理解できるよう構成されている．各章を独立させ必要に応じて使い分けることができる．見開き形式．

多変量解析法入門
永田靖・棟近雅彦共著／A5／256頁／本体2200円
しっかりした理論を身につけるため，簡単な例を２次程度の行列でどのように解析を進めていくのかを丁寧に解説した好個の教科・参考書．

表示価格はすべて税抜きです

サイエンス社

物理学テキスト好評書より(1)

Essential物理学
阿部龍蔵著／A5／224頁／本体1700円
大学初学年級の学生が十分読み下せるよう図や問題を数多く掲載し，見開きに整理された好個の教科・参考書である．

力学［新訂版］
阿部龍蔵著／A5／240頁／本体1600円
長年好評を得てきたテキストの新訂版．解析力学の説明を補足し充実させた．またシミュレーションプログラムをのせて，理解向上をはかった．

物理学入門
宮下精二著／B5／272頁／本体1850円
長さ，時間など物理学に必要な単位を用いた自然の表し方からはじめ，質点の運動，連続体，電磁気学，光学まで，物理学の基礎的な法則を説明する．

新・基礎 力学
永田一清編／A5／224頁／本体1800円
本書は力学の重要な項目を精選し，可能な限り丁寧に説明されたテキストである．また，章末の例題と演習問題により，手を動かして理解していけるように工夫されている．

物理学［新訂版］
阿部・川村・佐々田共著／A5／320頁／本体1750円
長い間好評を得てきた「物理学」の新訂版．より現代的に平易に記述されており，左頁に本文，右頁に図・表や細かい解説等を配した．２色刷．

新・演習 力学
阿部龍蔵著／A5／192頁／本体1850円
本書はテキスト「力学［新訂版］」の対となる理工系向け演習書である．数式を楽に追えるなど，初学者にも十分理解できるよう工夫した．

新・演習 物理学
阿部龍蔵・川村清・佐々田博之 共著
A5／288頁／本体2000円
テキスト「物理学［新訂版］」の対となる理工系向け演習書．

基礎物理学演習I，II
永田一清編／I巻：A5／384頁／本体2400円
II巻：A5／328頁／本体2400円
物理学の基礎的事項の総合的かつ速やかな理解に重点をおいた演習書．便宜をはかり頁単位で収録．

物理数学の基礎
香取眞理・中野徹共著／B5／160頁／本体1900円
理工系の学部１年生を対象として，物理学や理工系の専門科目を学ぶために必要な数学をわかりやすく解説した．２色刷．

基礎演習 物理学
加藤正昭著／A5／256頁／本体1850円
身近なことがらに物理の法則が顔を出す話題を，多くの精選された例題や問題を通して豊富に取り上げて解説．テキスト「物理学の基礎」の対となる理工系一般向演習書．２色刷．

表示価格はすべて税抜きです

サイエンス社

物理学テキスト好評書より(2)

振動・波動入門
鹿児島誠一著／A5／256頁／本体2200円
高校の物理のカリキュラムにうまく接続し，また実際の教育現場の実情に沿った理工系学生向のテキスト．コンピュータ利用も積極的に取り入れた．

電磁気学入門
阿部龍蔵著／A5／256頁／本体1700円
電流の話から説き起こし，電磁気学のひととおりを解説した入門書．電磁気現象の視覚化としてのシミュレーションプログラム例を付録に収録．

新・基礎　電磁気学
佐野元昭著／A5／240頁／本体1800円
理工系大学初年級の学生を対象に，電磁気学の基礎理解を目的としたテキスト．丁寧な説明と見やすい体裁によってまとめられている．2色刷．

新・演習　電磁気学
阿部龍蔵著／A5／208頁／本体1850円
テキスト「電磁気学入門」の対となる理工系向け演習書．深い理解と真の応用力が涵養できるよう工夫されている．

電磁気学演習［新訂版］
山村泰道・北川盈雄共著／A5／264頁／本体1850円
新訂にあたっては図を見やすくし，付録には数学諸公式や表を追加．頁単位で構成した使いやすく，よく分かる演習書．

新版　量子論の基礎
その本質のやさしい理解のために
清水明著／A5／288頁／本体2000円
臨時別冊・数理科学SGCライブラリの一巻として刊行された好著「量子論の基礎」の単行本化．時代の要請に応えた，必携のテキスト．

熱・統計力学入門
阿部龍蔵著／A5／176頁／本体1700円
本書は高校物理程度の知識でわかるよう熱の性質を扱っている．斯学の基本事項を読みやすい形でまとめた恰好の教科・参考書である．

量子力学［新訂版］
岡崎誠著／A5／240頁／本体1950円
長年好評を得てきた「量子力学」の新訂版．例題や図を多く配置し，初学者が短期間で使いこなし，応用できる力をつけられる教科・参考書．

熱力学の基礎
宮下精二著／A5／160頁／本体1600円
熱力学の標準的なテキスト．相転移現象などの興味深い対象を紙数を割いて詳述．磁性体の熱力学や輸送現象にも言及している．

演習　量子力学［新訂版］
岡崎誠・藤原毅夫共著／A5／256頁／本体1850円
標準的演習書として長い間好評を得てきた「演習量子力学」の新訂版．自ずと量子力学の根本が会得できるようさらに工夫されている．

表示価格はすべて税抜きです

サイエンス社

化学テキストより

日常の化学
—地球環境と生活様式の変革のために—
渡辺啓著／A5／224頁／本体1600円
大学・短大の初年級向で，化学と縁の薄い読者にも馴染みやすいテキスト．２色刷．

現代化学の基礎
物質科学へのアプローチ
渡辺啓著／A5／256頁／本体1800円
理工系学部等の基礎課程用テキストとして，のちの専門に関係するような題材を中心に要説した．

基礎 有機化学
大須賀篤弘・東田卓共著／A5／208頁／本体1850円
代表的な有機化合物に沿って，合成法，性質，関連の重要な概念を丁寧に解説．有機化学全般をコンパクトにまとめてあり，初学者がその大枠を理解するには好適のテキスト．

工学のための 有機化学
荒井貞夫著／A5／256頁／本体1800円
現在1200万以上の種類があり，年間10万の新しい種類が作りだされている有機化合物について，工科を専攻とする読者が学習するための教科書．

基礎 無機化学
花田禎一著／A5／232頁／本体1950円
大学ではじめて無機化学を学ぶ学生のために基礎を分かり易くまとめ，見開きに整理した好個の教科・参考書．

工学のための 無機化学
山下・片山・大倉・橋本共著／A5／216頁／本体1850円
工学分野に使われる内容の習得を目標にした教科書．基礎化学から多成分系化合物，無機材料までを分かりやすく解説．２色刷・見開き体裁．

工学のための分析化学
長島珍男著／A5／256頁／本体1900円
大学で化学を専攻する学部学生及び大学院生を対象とした分析化学の入門書．初学者にとって難解と思われる部分や数式的な表現を避け，わかりやすくまとめた好個の教科・参考書．

化学熱力学［新訂版］
渡辺啓著／A5／192頁／本体1650円
理工系の大学初年級，短大，高専，各種学校等の学生を対象に長年好評を博してきた「化学熱力学」の新訂版．

分析化学［新訂版］
綿抜邦彦著／A5／152頁／本体1500円
化学を十分に理解するまでに到っていない人々にも分かり易く解説．現代的な観点から，定評ある旧版を新訂．

基礎量子化学
量子論から分子をみる
馬場正昭著／A5／208頁／本体1950円
本書は大学ではじめて量子化学を学ぶ人たちへの入門書．量子論を用いて分子のスペクトルの観測結果をいかに理解するかという立場から解説．

表示価格はすべて税抜きです

サイエンス社

工学テキストより

機構学
森田鈞著／A5／160頁／本体1600円
機械は，抵抗力のある物体の組合せであり，その各部が行う限定された相対運動について学ぶのが機構学である．多数の図面を用いて丁寧に解説．

演習図学と製図
磯田浩・鈴木賢次郎共著／A5／34頁／本体880円
工業高専，短大，大学における技術基礎教育に対応して作成された図学の練習帳．ページの切りはなしを簡単にし，作図・提出の便宜を図っている．

工業熱力学の基礎
斎藤孟著／A5／264頁／本体2200円
工科系の高専・大学で熱力学を学ぼうとする学生向けに，高校の理科の知識と簡単な微積分の計算がわかれば理解できるよう配慮されたテキスト．

工学基礎図学と製図［新訂版］
磯田浩・鈴木賢次郎共著／A5／208頁／本体1480円
広く講義で使われてきた「工学基礎図学と製図」の新訂版．AutoCADの利用も配慮し，さらに2色刷とするなどより現代的に改訂した．

機械工学のための 振動・音響学
鈴木・西田・丸山・渡辺共著／A5／256頁／本体2300円
大学の機械工学系の3～4年生，工業高専の最上級生を対象とし，振動学・音響工学の基礎をしっかりと習熟できることに主眼をおいたテキスト．

演習機械振動学
佐藤・岡部・岩田共著／A5／200頁／本体1800円
機械力学，特に振動を中心としたダイナミックスについての基礎学力をつけるための演習書．質点及び剛体の力学の基礎からはじめている．

機械力学入門
辻岡康著／A5／192頁／本体1600円
機械力学とは機械に関する動力学の問題を扱う学問である．この入門書では，線形系の振動から始め，回転機械・往復機械の動力学までを解説する．

演習 機械運動学
高野政晴・遠山茂樹共著／A5／248頁／本体2524円
ロボットの機構など，時代の要請にも即した新鮮な内容をもり込み，豊富な図で解説した演習書．要項・例題を頁単位で配し，学習の便宜をはかる．

演習 材料力学［新訂版］
尾田十八・三好俊郎共著／A5／224頁／本体1980円
長い間好評を得てきた「演習材料力学」を現在の事情を考慮し，単位系はSIを中心とした解説に改め，解答もより明快にした．2色刷．

演習振動・波動論
徳岡・杉山・松本共著／A5／216頁／本体2233円
工学の諸分野で基礎となる振動現象と波動現象の本質と解析方法が頁単位の演習書形式で総合的に学べるよう配慮された好個の書．

表示価格はすべて税抜きです

サイエンス社

コンピュータ関連テキスト(1)

最新・情報処理のしくみ
コンピュータシステムとネットワーク利用
太田忠一・古殿幸雄 共編著
B5／216頁／本体1900円
大学初学年の学生，社会人初心者向けの入門書.

情報処理システム入門
［第３版］
浦昭二・市川照久共編／A5／約320頁／予価1800円
時代の流れを考慮し，第1部コンピュータシステムのしくみ，第2部情報処理の基本形，の2部構成とした.

情報リテラシ I, II
I：〈Word〉基礎から実践まで
II：〈Excel〉基礎から実践まで
尾崎正弘・足達義則 共編著
B5／各152頁／本体各1650円
各章末の演習問題は，検定試験に対応している.

文科系のための
コンピュータ リテラシ
［第３版］
Microsoft Officeによる
太田忠一編／植松康祐・草薙信照共著
B5／280頁／本体1900円
ワープロと表計算を中心に平易に解説.

コンピュータサイエンスのための
離散数学
守屋悦朗著／A5／240頁／本体2400円
理論的コンピュータサイエンスの各分野で必要な斯学の中から特に基礎的事項を取り上げる.

情報処理
Concept & Practice
草薙信照著／A5／280頁／本体1900円
主にOfficeアプリケーションを通し基礎から解説.「初級システムアドミニストレータ試験」の出題範囲もカバー．文系学生の講義に最適.

オートマトン言語理論 計算論 I, II ［第２版］
J.E.ホップクロフト他著／野崎昭弘 他訳
A5／I：352頁／本体2800円
II：256頁／本体2600円
入門書として高い評価を得ている書の邦訳.

計算機科学入門
M.A.アービブ・A.J.クフォーリ・R.N.モル共著
甘利・金谷・嶋田共訳／A5／248頁／本体2524円
オートマトンの理論，PascalとLispの入門書，論理回路，ブール代数などをわかりやすく解説した.

教養としての
コンピュータ・サイエンス
渡辺治著
B5／160頁／本体1550円
いくつかの話題を楽しく読み進められるよう工夫.大学1年生を対象とした好個のテキスト．2色刷.

新・コンピュータ解体新書
清水忠昭・菅田一博共著／A5／256頁／本体1600円
好評を博した前著にインターネットの項目を加え，より「やさしく」「わかりやすく」，自然に理解できるよう図を多用し，丁寧に解説.

表示価格はすべて税抜きです

サイエンス社

コンピュータ関連テキスト(2)

ハードウェア入門
柴山潔著／A5／160頁／本体1400円
現代のコンピュータシステムの主要なハードウェア機構を構成するプロセッサ，メインメモリ，及び周辺装置の各機能やそれらの分担方式について明らかにする．

ザ・FORTRAN77
戸川隼人著／A5／152頁／本体1408円
計算機科学の教育に経験豊かな著者が，すぐに使えるFORTRANのプログラミングの方法を解説．わかりやすさを重視して書かれている．２色刷．

ザ・Fortran90/95
戸川隼人著／A5／216頁／本体1750円
数値計算に適した言語として広く使われているFortranの最新仕様に即した入門書．本書では新しい要素を十分に活かし，入門者ができるだけ短時間で理解できるように書かれている．２色刷．

COBOLの基礎と応用
JIS1992年版準拠
大駒誠一著／A5／216頁／本体1450円
初心者がCOBOLのプログラムを書けるようになることを目標に，実践に即し整理された入門書．

Pascalプログラミングの基礎
真野芳久著／A5／280頁／本体1900円
プログラミングの初心者を対象に，例題を通した説明を行った．誤りないプログラミングのための知識，手法，プログラムの構成法なども紹介．

改訂 FORTRAN77
大駒誠一著／A5／280頁／本体1700円
例題ごとにいくつかのプログラムを提示し解説を施すというスタイルで，短期間に一定のレベルに達したいという初学者に最適．好評書の改訂版．

Fortran 77プログラミング
原田賢一著／A5／324頁／本体1650円
実践的な例題を豊富に使用して，アルゴリズムや計算手順など考え方を丁寧に説明．流れ図やプログラム，重要なポイントは２色刷の見やすい構成．

演習と応用FORTRAN 77
戸川隼人著／A5／248頁／本体1806円
実際に書いて「体で覚える」ように応用に重点をおいた演習書．例題を通して数値計算・統計解析・事務処理などの概要を理解することができる．

ザ・PASCAL
戸川隼人著／A5／196頁／本体1700円
プログラミング言語教育にとって最近とみにその重要性が指摘されるPascalの要所をあます所なく解説する．例題は有限要素法まで扱う．２色刷．

Pascal 入門
古郡廷治著／A5／240頁／本体2300円
人文系・理工系という垣根を取り払って，幅広い分野の読者層を対象とし，わかりやすくPascalプログラミングの「作法」を伝えた入門書．

表示価格はすべて税抜きです

サイエンス社

コンピュータ関連テキスト(4)

Javaによる
プログラミング入門
権藤克彦著／A5／224頁／本体1850円
初めてプログラミングを学ぶ人のための入門書．言語はプログラミング言語として洗練されているJavaを選択．見開き体裁で読みやすい構成．

ザ・Java2
対話的に動くホームページの作成技術
戸川隼人著／A5／200頁／本体1800円
半期の授業でJavaの初歩を教えるためのテキスト．独習用としても使える．

ザ・Visual Basic
戸川隼人著／A5／264頁／本体1850円
変数や関数，制御構造，ファイル入出力などのプログラミングの基本はもちろん，構造体，クラス，タイプなど高度な技術も解説．２色刷．

実習Visual Basic .NET
だれでもわかるプログラミング
林直嗣・室井勝子・鈴木三枝子 共著
B5／200頁／本体1900円
着実に理解を深めるために豊富な例題，練習問題を用意した．2色刷．

演習と応用 Java
戸川隼人著／A5／232頁／本体1900円
プログラミング言語初心者も念頭においた，アプレットの基本的な書きかたを短期間で学べる演習中心のテキスト．GUIや画像，音声まで，ひととおりの機能が約4ヶ月で学べる．

ネットワーク利用の基礎
[新訂版]
インターネットを理解するために
野口健一郎著／A5／216頁／本体1850円
技術の発展を反映した，見開き体裁で分かりやすく解説された好個の教科・参考書．

ザ・数値計算リテラシ
—C&FORTRANによる—
戸川隼人著／A5／160頁／本体1480円
代表的なアルゴリズムをわかりやすく説明した，応用力を養える好個のテキスト．

数値解析入門［増訂版］
山本哲朗著／A5／288頁／本体2000円
好評を得てきた「数値解析入門」の増訂版．さらに幾つかの現代的数値計算法を取り上げた．学生，技術者，研究者に好適な教科，参考書．

Fortran 95, C&Javaによる新数値計算法
—数値計算とデータ分析—
小国力著／A5／328頁／本体2200円
数値計算の基本を実務的な視点に立って広い観点から解説．

数値計算の基礎と応用
—数値解析学への入門—
杉浦洋著／A5／200頁／本体1800円
コンピュータをツールとして仕事や研究に利用する際不可欠である数値計算をすみずみまで解説．理工系の読者にはおすすめのテキスト．

表示価格はすべて税抜きです

サイエンス社

心理学関連好評書

コンパクト新心理学ライブラリ

〈監修〉 梅本堯夫・大山　正

近年，心理学に対する関心がますます高まっている一方で，大学教育をめぐる状況は大きく変貌を遂げており，授業内容はよりわかりやすくやさしく，親しみやすいものが求められています．
本ライブラリは，このような時代の要請に応え，心理学の各領域のエッセンスをコンパクトにまとめ，伝えることを目的として編まれました．視覚的な理解にも配慮し，各巻２色刷・左右見開き形式による体裁としました．

12 心理学研究法 データ収集・分析から論文作成まで

大山　正・岩脇三良・宮埜壽夫共著　　四六／304頁／本体2200円

つかみどころのない「心」を対象とする心理学ではどのような研究法が用いられるのでしょうか？　本書は，自然科学から学びつつ独自の発展を遂げてきた心理学の研究法を，方法別に簡潔に分かりやすくまとめた決定版です．入門から研究論文の執筆まで，参照可能な座右の書として最適です．

主要目次　心理学研究法の特色　観察法・面接法・実験法　質問紙法　セマンティック・ディファレンシャル法（SD法）　反応時間測定法　心理検査法　精神物理学的測定法　データ解析の基礎　実験計画・検定：分散分析　相関と回帰　因子分析　多次元尺度構成　カテゴリーの数量化　研究論文の書き方

14 生理心理学 脳のはたらきから見た心の世界

岡田　隆・廣中直行・宮森孝史共著　　四六／264頁／本体2200円

本書は，はじめて学ぶ人のために，生理心理学のエッセンスをコンパクトにまとめた教科書です．細胞・分子といったミクロなレベルから，精神疾患と脳との関係に至るまで，主要分野を幅広くカバーしました．基本事項のみならず，最新の知見も盛り込み，発展していく生理心理学の世界の雰囲気も伝えます．

主要目次　生理心理学への招待　脳の構造　脳の信号　脳と知覚　脳と記憶　学習　情動　動機づけ　心の病気と脳　側性化：大脳半球の機能的非対称性　睡眠　意識　臨床心理学と脳科学

グラフィック性格心理学

戸田まり・サトウタツヤ・伊藤美奈子共著　　A5／328頁／本体2450円

本書は，性格心理学の現在を気鋭の著者陣が分かりやすく解説したテキスト・参考書です．「性格」について何が分かっていて何が分かっていないのか，臨床，発達，社会，歴史の観点から縦横に論じていきます．左頁に本文，右頁に図表を配した見開き形式・２色刷により，視覚的な理解を助けます．

主要目次　臨床心理学から見た性格　今，学校現場で起こっている課題　精神病理に現代を見る　文化と性格　子どもの「性格」とは　人の輪の中で　生涯発達の時代　性格心理学の源流と成立　性格心理学の展開　性格心理学の新潮流：性格の可変性

表示価格はすべて税抜きです

サイエンス社